


27/9/2022

SPAZI METRICI

(X, d) È UNO SPAZIO METRICO SE

X È UN INSIEME E $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ È UNA

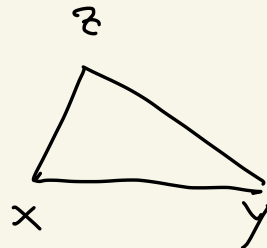
DISTANZA, CIOÈ:

① $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y$

② $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$

③ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z$

(DIS. TRIANGOLARE)



OSS: $Y \subseteq X \Rightarrow (Y, d|_Y)$ È UNO SPAZIO METRICO

ES: $(\mathbb{R}^n, l_1)$ $d(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

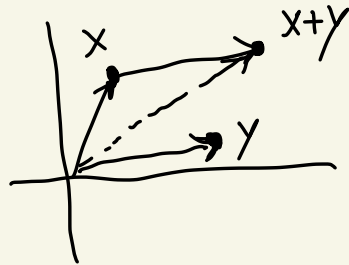
UNA CLASSE IMPORTANTE DI SPAZI METRICI
SONO GLI SPAZI NORMATI

$(E, \|\cdot\|)$ È SPAZIO VETTORIALE (SU $\mathbb{R}$)
 $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, +\infty)$ È UNA NORMA SU E

$(E, d_{\|\cdot\|})$ È UNO SPAZIO METRICO
 $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y.$

$\|\cdot\|$ È UNA NORMA SU E SE

- ① $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x$
- ② $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

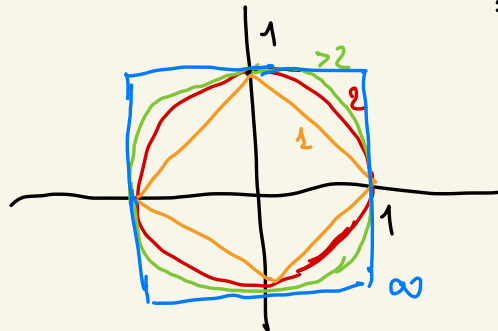


$B_1^{\|\cdot\|_p}$

ES: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty), \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$



Es: $E = C([a,b]) = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua}\}$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \geq 1 \\ \max_{x \in [a,b]} |f(x)| & p = +\infty \end{cases}$$

TOPOLOGIA (X, d) sp. metrico

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad (r > 0)$$

$A \subseteq X$ è APERTO se $\forall x \in A \exists r \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq A$

$C \subseteq X$ è CHIUSO se $X \setminus C$ è APERTO

UNA TOPOLOGIA SU X È $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ APERTO}\}$

PROPRIETÀ:

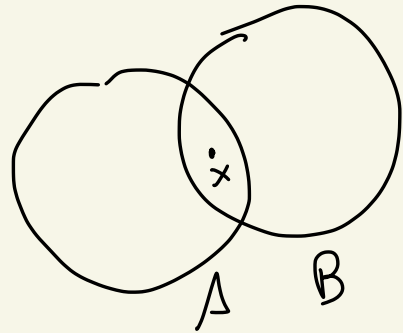
① $\emptyset, X$ SONO APERTI E CHIUSI

② $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

③ $\{A_i\}_{i \in I}, A_i \text{ APERTI} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

④ $C, D \text{ CHIUSI} \Rightarrow C \cup D \text{ CHIUSO}$

⑤ $C_i \text{ CHIUSO } \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_i C_i \text{ CHIUSO}$



OSS:

A_i APERTI $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i$ È APERTO

MA IN GENERALE $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ NON È APERTO

$$\bigcap_n B_{1+\frac{1}{n}}(0) = \overline{B_1(0)} = \{x \text{ T.C. } d(x, 0) \leq 1\}$$

DEF:

$x \in X$, $U \subseteq X$ È UN INTORNO DI x

SE $\exists A$ APERTO T.C. $x \in A \subseteq U$, EQUIV.

SE $\exists r > 0$ T.C. $B_r(x) \subseteq U$.

SUCCESSIONI CONVERGENTI

$\{x_n\}_n$ succ. in X

$$x_n \rightarrow x_{n \rightarrow \infty} \quad \text{SE} \quad \lim_n x_n = x$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_n d(x, x_n) = 0$$

equiv.

$$\textcircled{2} \quad \forall U \text{ intorno di } x \quad \exists n_0 \text{ t.c. } x_n \in U \quad \forall n > n_0$$

equiv.

$$\textcircled{3} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

PROP: C CHIUSO $\Leftrightarrow \forall x_n \in C$ con $x_n \rightarrow x \in X$
si ha $x \in C$

DIN: $(\Rightarrow)$ $\times$ ASSURDO $x \in A = X \setminus C$ APERTO
 $\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$
MA $x_n \in B_r(x)$ DEFIN. IN n
 $\Rightarrow x_n \notin C$ DEFIN. IN n . ASSURDO,

($\Leftarrow$) $\times$ ASSURDO $A = X \setminus C$ NON È APERTO

$\Rightarrow \exists x \in A$ T.C. $\forall r > 0 \quad B_r(x) \cap C \neq \emptyset$

SCELGO $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C$ È UNA SUCC.

T.C. $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \in C$. ASSURDO.

INSIEMI COMPATTI

DEF: $C \subseteq X$ È COMPATTO (PER SUCCESSIONI)

SE $\forall x_n \in C$ SUCC. $\exists x_{n_k}$ SOTTO SUCC.

ED $\exists x \in C$ T.C. $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$.

DEF: $C \subseteq X$ È LIMITATO SE

$C \subseteq B_r(x)$ PER QUALCUN $r \in \mathbb{R}$.

PROP: C COMPATTO $\Rightarrow C$ CHIUSO E LIMITATO.

DIM: (1) CHIUSO.

$$x_n \in C, \quad x_n \rightarrow x \in X.$$

$$\exists n_k \text{ T.c. } x_{n_k} \rightarrow y \in C, \text{ MA } y = x \Rightarrow x \in C.$$

(2) LIMITATO.

SE C NON FOSSE LIMITATO $\Rightarrow \forall n$

$$\exists x_n \in C \setminus B_n(x). \quad \exists n_k \text{ T.c. } x_{n_k} \rightarrow y \in C.$$

$$+\infty \leftarrow \lim_k d(x_{n_k}, x) \leq d(x, y) + d(x_{n_k}, y) \xrightarrow{k} d(x, y) \in \mathbb{R}.$$

ASSURDO.

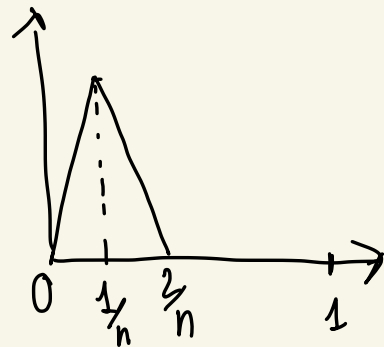
OSS: NON VALE IL VICEVERSA (se $X \neq \mathbb{R}^n$).

$C = \overline{B_1(0)}$ IN UNO SP. NORMATO DI DIM. ∞ .

$$X = C([0, 1]) \quad \|f\| = \max_x |f(x)|$$

$$\overline{B_1} = \left\{ f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \text{ CONTINUE} \right\}$$

$$\partial B_1 \ni f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$



$$f_n(x) \xrightarrow{n} 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{MA} \quad \|f_n - 0\| = 1 \quad \forall n$$

$$f_n \not\rightarrow 0 \text{ in } (X, d)$$

$\overline{B_1}$ e ∂B_1 SONO CHIUSI E LIN. MA
NON COMPATTI.

PROP. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO E LIN. È COMPATTO.

DIM. SEGUE DAL TEO DI BOLZANO-WEIERSTRASS
IN $\mathbb{R}^n$: x_n È LIMITATA $\Rightarrow \exists x_{n_k}$ CONV. IN $\mathbb{R}^n$.
SE x_n STA IN C CHIUSO $\Rightarrow \lim_k x_{n_k} \in C$.

COMPLETEZZA

DEF: x_n succ. in X è di CAUCHY se

$$\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon.$$

DEF: (X, d) si dice COMPLETO se

$\forall x_n$ succ. di CAUCHY $\exists x \in X$ t.c.

$$x_n \xrightarrow{n} x.$$

ES: $(\mathbb{R}^n, l_1)$ è completo, $(\mathbb{Q}^n, l_1)$ non è completo

DEF: $(X, \|\cdot\|)$ SP. NORMATO COMPLETO
SI DICE SPAZIO DI BANACH.

ES: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ $\|\cdot\|$ È UNA QUALSIASI NORMA
È SEMPRE COMPLETO.

TUTTE LE NORME SU $\mathbb{R}^n$ SONO EQUIVALENTI A $|\cdot|$,
CIOÈ $\exists m < M$ T.C. $m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \forall x$,
→ DA DIMOSTRARE

QUINDI x_n DI CAUCHY PER $\|x\| \Leftrightarrow$
LO È PER $|\cdot|$.

ES: $X = C([a, b])$

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ È UNO SPAZIO DI BANACH

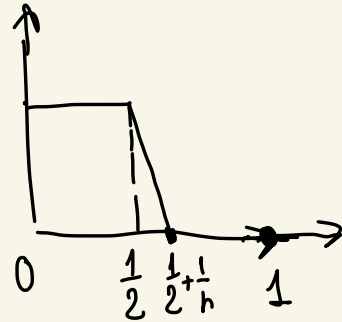
(X ESERCIZIO)

$(X, \|\cdot\|_p)$ NON È COMPLETO

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{n}{2} - nx & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$f_n \in C$ di Cauchy

MA $f_n \rightarrow \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \notin X$



PROP

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|$$

SONO NORME SU $\mathbb{R}^n$.

DIN: $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow x = 0.$

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_i |\lambda x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

VA VISTO CHE $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$$p = \infty \quad \|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$p \in [1, +\infty)$ USIANO IL

LEMMA (DIS. DI HÖLDER)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

DIN MOSTRIAMO CHE

$$\sum |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

DIVIDENDO PER $\|x\|_p \cdot \|y\|_q$

$$\sum_i \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\downarrow$
YOUNG

DIS. DI YOUNG

$a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

CONSIDERIAMO

$$\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i + y_i|^p = \sum_i |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_i (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\sum_i |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1 \\ q &= \frac{p}{p-1} \end{aligned}}$$

HÖLDER

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x+y\|_p^{p-1}$$

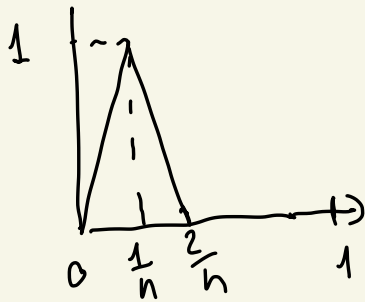
$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

PROP $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ È UNO SP. DI BANACH.

CIOE' f_n DI CAUCHY $\Rightarrow \exists f \in C([a,b])$ T.C.

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{SI DICE CHE } f_n \text{ CONVERGE} \\ \text{UNIFORMEMENTE A } f \end{array} \right]$$

OSS: LA CONV. UNIFORME È PIU' RESTRITTIVA
DELLA CONV. PUNTUALE



$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Din f_n DI CAUCHY IN $C([a,b])$, cioè $\forall \varepsilon$

$$\exists n_\varepsilon \text{ T.C. } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \\ \forall n, m > n_\varepsilon.$$

$\forall x \in [a,b]$, $f_n(x)$ è DI C. IN $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists \lim_n f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \\ \forall n > n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

DOBBIAMO VERIFICARE CHE $f \in C([a,b])$.

FISSAMO $\varepsilon > 0$ E FISSIAMO $n > n_\varepsilon$.

DATO CHE f_n È UNIF. CONT., $\exists \delta$ T.C.

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{SE} \quad |x - y| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 3\varepsilon \quad \text{SE} \quad |x - y| < \delta \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in \text{UNIF. CONTINUA}.$

FUNZIONI CONTINUE

DEF: (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ SP METRICI

$f: X \rightarrow Y$ È CONT. IN $x_0 \in X$

SE $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0).$

EQUIV. SE $\forall V$ INT. DI $f(x_0)$

$\exists U$ INT. DI x_0 T.C. $f(U) \subseteq V.$

TEOREMI

(X, d) SP. METRICO COMPATTO

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$

① f È UNIF. CONTINUA (HEINE-CANTOR)

② f ABBINETTE MASSIMO E MINIMO IN X
(WEIERSTRASS)

OSS:

(X, d) SP. METRICO $\Rightarrow$

$d(x, y)$ È CONT. IN $x \in X$ IN Y .

INFATTI SE $x_n \rightarrow x$

$$\begin{array}{ccccc} -d(x_n, x) & \leq & d(x, y) - d(x_n, y) & \leq & d(x_n, x) \\ n \downarrow & & \downarrow & & \downarrow n \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

IN PART. SE $(X, \|\cdot\|)$ È NORMATO

$x \mapsto \|x\|$ È UNA FUNZ. CONTINUA SU X .

PROP: $\|\cdot\|$ NORMA SU $\mathbb{R}^n \Rightarrow$
 $\|\cdot\|$ È EQUIV. A $|\cdot|$ (NORMA EUCLIDEA),
 cioè $\exists m, M > 0$ t.c.

$$m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Def: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$

$$m = \min_{x \in S^{n-1}} \|x\| \quad M = \max_{x \in S^{n-1}} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \Rightarrow m \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq M \Rightarrow m|x| \leq \|x\| \leq M|x|.$$

OSS: IN PART. TUTTI GLI SPAZI $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

HANNO LA STESSA TOPOLOGIA

E SONO TUTTI COMPLETI, CIOÈ SPAZI DI BANACH.

DEF: $f: X \rightarrow Y$ È L -LIPSCHITZIANA $(L \geq 0)$

$$\forall x, y \in X \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

OSS: f LIP. $\Rightarrow f$ È UNIF. CONTINUA

$f: X \rightarrow X$ L -LIPSCHITZ. con $L < 1$

SI CHIAMA CONTRAZIONE.

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (BANACH-CACCIOPOLI)

(X, d) sp. metrico completo

$f: X \rightarrow X$ CONTRAZIONE $\Rightarrow$

$\exists! \bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ PUNTO FISSO di f .

INOLTRE $\forall x_0 \in X$ la succ. $x_{n+1} = f(x_n)$

CONVERGE A $\bar{x}$.

COME SONO FATTI I COMPATTI IN $C([a,b])$?

TEOREMA (ASCOLI-ARZELÀ)

$(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO

$f_n \in C(K)$ SUCCESSIONE T.C.

① $\|f_n\|_\infty \leq C \quad \forall n$

② f_n EQUICONTINUE, CIOÈ $\forall \varepsilon \exists \delta$ T.e.

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall |x-y| < \delta, \quad \forall n.$$

DIN PRENIDIANO una succ. $x_i \in K$

DENSA IN K , cioè $\forall \varepsilon \in \forall x \in K$

$$\exists x_i \in B_\varepsilon(x) \cap K.$$

$f_n(x_i)$ È UNA SUCC. LIMITATA IN $\mathbb{R}$.

PER B.W. $\exists$ SOTTO SUCC. $f_{n_k^{(1)}} \text{ T.C.}$

$$f_{n_k^{(1)}}(x_1) \xrightarrow[k]{\quad} y_1 \in \mathbb{R}$$

$\exists$ SOTTO-SOTTO SUCC. $f_{n_k^{(2)}} \text{ T.C.}$

$$f_{n_k^{(2)}}(x_1) \rightarrow y_1$$

$$f_{n_k^{(2)}}(x_2) \rightarrow y_2$$

PER PROCEDIMENTO DIAGONALE LA SOTTOSUCC.

$$f_{n_k}^{(k)}(x_i) \rightarrow y_i \in \mathbb{R} \quad \forall i.$$

CHIAMO $f_k = f_{n_k}^{(k)}$. MOSTRIAMO CHE

f_k È DI CAUCHY. FISSAMO $\varepsilon > 0$ E SIA $\delta > 0$ DATO DA (2)

E SIA $x_1, \dots, x_N$ UN SOTTOINSIEME DELL'INSIEME

DENSO T.C. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x_i)$,

QUESTO SI PUÒ FARE PERCHÉ K È COMPATTO
E $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(x_i)$.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE

$\exists K_\varepsilon$ T.C.

$$|f_k(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall k, j > K_\varepsilon.$$

$$\text{SCELGO } K_\varepsilon \text{ T.C. } |f_k(x_i) - f_j(x_i)| \leq \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ \forall k, j > K_\varepsilon$$

PER $x \in K \quad \exists x_i$ T.C. $|x - x_i| < \delta$, QUINDI

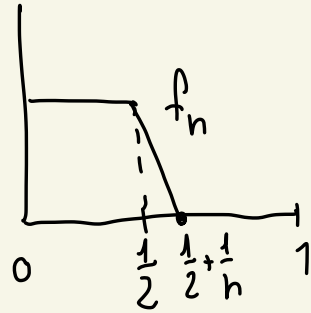
$$|f_k(x) - f_j(x)| \leq |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)|$$

$$\leq 3\varepsilon \\ \Rightarrow f_k \text{ CONVERGE IN } C(K).$$

$$\forall k, j > K_\varepsilon$$

OSS:

f_k EQUILIN. NON BASTA



OSS:

f_k EQUILIN. E EQUILIPSCHITZ BASTA

$$\exists C > 0 \quad |f_k(x) - f_k(y)| \leq L |x - y|$$

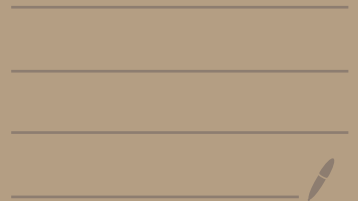
SI POSSONO CARATTERIZZARE I COMPATTI DI $C(k)$:

TEOREMA $E \subseteq C(k)$ CHIUSO

E COMPATTO $\Leftrightarrow$ TUTTE LE FUNZ.
 $f \in E$ SONO EQUILIN. ED EQUICONTINUE.

LEZIONE 3

4/10/2022



LIMITI E FUNZIONI CONTINUE IN $\mathbb{R}^n$

PROP: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $x_0 \in A$

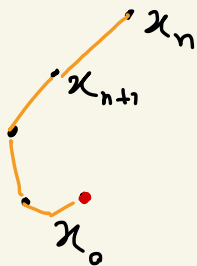
f È CONTINUA IN $x_0 \iff$

$f \circ \gamma(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $t=0$

$\forall$ CURVA (CONTINUA) $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CON $\gamma(0) = x_0$.

Dim: $f \text{ CONT} \Rightarrow f \circ \gamma \text{ CONT. } \forall \gamma$

$(\Leftarrow)$ SE f NON È CONT., $\exists x_n \rightarrow x_0$ T.C. $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$



$$\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{CURVA}$$

$$\text{T.C. } \gamma(0) = x_0 \quad \in$$

$$\gamma(t_n) = x_n \quad \text{con } t_n \searrow 0.$$

$$f \circ \gamma(t_n) = f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) = f \circ \gamma(0)$$

$$\Rightarrow f \circ \gamma \text{ NON È CONTINUA.}$$

OSS: PER VEDERE CHE f NON È CONTINUA
 "BASTA" TROVARE γ T.C. $f \circ \gamma$ NON È CONT.

$$\Delta \Delta \quad \gamma(t) = t \cdot v, \quad f \circ \gamma(t) = f(t \cdot v).$$

ES:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \quad ?$$

$$f(0, y) = f(x, 0) = 0 \quad \forall x, \forall y$$

$$\gamma(t) = (t, t) \quad f \circ \gamma(t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \quad \forall t$$

$$0 = f \circ \gamma(0) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{LA FUNZIONE} \\ \text{NON È CONTINUA}$$

OSS: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, v) = f(0) \quad \forall v \neq 0$

$t \rightarrow 0$

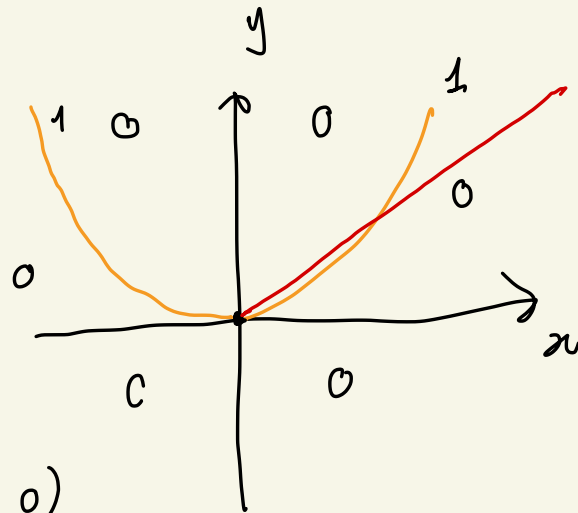
NON

IMPLICA

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

①

$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$



$\forall v \quad f(t, v) = 0, \quad t \ll 1$

② $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$f(x, x^2) = \frac{x^5}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f \text{ non è cont.}$$

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \frac{x + o(x)}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

PER VEDERE CHE f È CONTINUA SI PUÒ
CERCARE $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ CONT., $g(0) = 0$, $g \geq 0$ T.C.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq g(|x - x_0|) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

ESEMPLI: $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^2} \quad \alpha, \beta > 0$

PER QUALI $\alpha, \beta \quad \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

CERCHIAMO ρ T.C. $f(x,y) \leq \rho (\sqrt{x^2 + y^2})$

$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$f(x,y) \leq \sqrt{x^2 + y^2}^{\alpha + \beta - 2}$

$\alpha + \beta > 2 \Rightarrow f \in \text{CONTINUA}$

D'ALTRO CANTO $f(x,x) = |x|^{\alpha + \beta - 2} \not\rightarrow 0$ se $\alpha + \beta \leq 2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{|x|^2 + |y|^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\phi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$$

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ CONT.}$$

$$\phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ CONT.}$$

$$[\phi \text{ ONE-TO-ONE}]$$

$$\begin{cases} X = \operatorname{sgn}(x) |x|^{\alpha/2} \\ Y = \operatorname{sgn}(y) |y|^{\beta/2} \end{cases}$$

$$f \text{ CONT. IN } (0, 0) \Leftrightarrow f \circ \phi^{-1}(X, Y) \text{ CONT. IN } (0, 0)$$

$$f \circ \phi^{-1}(X, Y) = \operatorname{sgn}(XY) \cdot \frac{|X|^{\frac{\alpha}{2}} \cdot |Y|^{\frac{\beta}{2}}}{X^2 + Y^2} \xrightarrow{(X, Y) \rightarrow (0, 0)} 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}{\alpha + \beta - \alpha\beta} > 2$$

CALCOLO DIFFERENZIALE

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $x_0 \in A$

LA DERIVATA PARZIALE i^a È LA DERIVATA

DI f NELLA VARIABILE x_i , CIOÈ È IL LIMITE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = f_{x_i}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0)$$

SE ESISTONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI

IL VETTORE $\nabla f(x_0) = \left(\dots \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \dots \right) \in \mathbb{R}^n$ SI DICE
GRADIENTE DI f IN x_0

DA TO $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, IL LIMITE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = D_v f(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

SI DICE DERIVATA DIREZIONALE DI f LUNGO v

PROP. (FERMAT) SE x_0 È DI MAX/MIN LOCALE PER f
 $\Rightarrow t=0$ È DI MAX/MIN LOCALE PER $f(x_0 + tv)$ $\forall v$

$\Rightarrow$ SE $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ESISTE, SI HA $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$
IN PART. $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ (SE ESISTE)

DEF: $f \in \mathcal{C}^1$ DIFF. IN $x_0 \in \Lambda$ SE $\exists v \in \mathbb{R}^n$ T.C.

$$f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

OSS: STIANO DICENDO CHE $f(x)$
È APPROSSIMATA, A NENNO DI UN $o(|x - x_0|)$
DALL'APPLICAZIONE AFFINE

$$x \mapsto f(x_0) + v \cdot (x - x_0)$$

PROP. f DIFF. IN $x_0 \Rightarrow \exists \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\forall h \quad f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

DIN SAPPIAMO CHE $f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$

FISSAMO i E PRENDIAMO $x = x_0 + t e_i$

$$\frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = \cancel{t} v_i + o(\cancel{t}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

OSS: LO STESSO CONTO CON $x = x_0 + t w$ CI DA' CHE

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot w.$$

1a PART. IL MASSIMO

$$\max_{w: |w|=1} \frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

ED È ASSUNTA NELLA DIREZIONE $w = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

CIOÈ $\nabla f(x_0)$ INDIVIDUA LA DIREZIONE
DI "MASSIMA PENDENZA" DI f

TEO (DIFF. TOTALE)

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in A,$$

$$\text{SUPP. CHE } \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall i \in \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\text{E CHE } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ SIA CONTINUA IN } x_0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow f \text{ È DIFF. IN } x_0.$$

Dim ($n=2$).

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) \\ + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0)$$

(x LAGRANGE)

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right] (x - x_0) + \\ + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right] (y - y_0)$$

per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

QUINDI f È DIFF. IN (x_0, y_0) .

OSS: LE STESSSE DEF. VALGONO PER

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f = (f_1, \dots, f_m) \quad f_i: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

f CONT. IN $x_0 \Leftrightarrow f_i$ CONT. IN $x_0 \quad \forall i$

f DIFF. IN $x_0 \Leftrightarrow f_i$ DIFF. IN $x_0 \quad \forall i$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

DOVE $Df(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$ SI DICE

MATRICE JACOBIANA DI f IN x_0

OSS: LA DEF. È ANALOGA IN SPAZI DI BANACH

$f: B_1 \rightarrow B_2$ B_i SP. DI BANACH

f È DIFF. IN x_0 SE $\exists L: B_1 \rightarrow B_2$ LINEARE E CONTINUA (!)

T.C. $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$

ANALISI 2

LEZIONE 4

11/10/2022



DERIVATA DI FUNZ. COMPOSTA

$$f: U \rightarrow V$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ APERTO}$$

$$V \subseteq \mathbb{R}^m \quad "$$

$$g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

f diff. in x_0 , g diff. in $f(x_0) \Rightarrow$

$$g \circ f \text{ è diff. in } x_0 \text{ e } D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

DIM.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)\right) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \end{aligned}$$

ES: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ diff

$\gamma: [a, b] \rightarrow U$ curva diff.

$g(t) = f(\gamma(t))$

$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

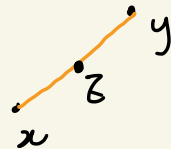
TEO (LAGRANGE)

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ DIFF.

$[x, y] \subseteq U$

$[x, y] = \{ \lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1] \}$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x)$
 $z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in (0, 1)$



Din

SIA $g(t) = f(x + t(y-x))$ $t \in [0,1]$
APPLICO LAGR. A $g(t)$

$$g(1) - g(0) = f(y) - f(x) = g'(\bar{t}) =$$

$$= \nabla f(g(\bar{t})) \cdot (y-x)$$

$$= \nabla f(x + \bar{t}(y-x)) \cdot (y-x) \quad \bar{t} \in (0,1).$$

OSS: NON VALE PER $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f = (f_1, \dots, f_m)$

$$\text{SI HA } f(y) - f(x) = \left(\dots \nabla f_i(z_i) \cdot (y-x) \dots \right) \quad 1 \leq i \leq m$$

MA z_i DIPENDE DA i .

$$\text{POSSO SCRIVERE } |f(y) - f(x)| \leq \max_{z \in [x,y]} |Df(z)| \cdot |y-x|$$

$$\left[\text{NORME SU } M_{n \times m} \right]$$

$$\|M\|_e = \left(\sum_{ij} m_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \|M\| = \max_{v: |v|=1} |M \cdot v|$$

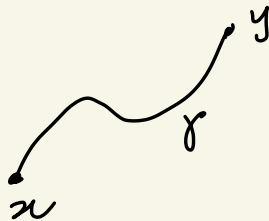
COR: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. U open & connesso

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow f \text{ cost.}$$

DIN: $x, y \in U \quad x \neq y$

$$\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow U$$

$$\gamma(0) = x \quad \gamma(1) = y$$



$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma) \cdot \gamma'(t) = 0 \Rightarrow f \circ \gamma \text{ COSTANTE}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y).$$

DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \dots$$

DERIVATA PARZIALE k^a , CE NE SONO n^k

$$(D^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{MATRICE HESSIANA } (n \times n)$$

$$(D^k f)_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \quad D^k f: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

K-LINEARE

$$D^k f(x_0) [v_1, \dots, v_k] = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k}$$

$$D^k f(x_0) [v]^k = D^k f(x_0) [v, v, \dots, v],$$

OSS: $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ NON È IN GENERALE
INVARIANTE x PER PERMUTAZIONE
DEGLI INDICI

ES: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

$$\nabla f(0, 0) = 0$$

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TEO (SCHWARZ)

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ DIFF.

$x_0 \in U$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ ESISTONO IN $B_r(x_0)$ PER $r > 0$

E SONO CONTINUE IN x_0 .

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$$

sin $h, k \in (-\delta, \delta)$

$$f(x_0 + h e_i + k e_j) - f(x_0 + h e_i) - f(x_0 + k e_j) + f(x_0)$$

$$= g(1) - g(0) = g'(0) \stackrel{L.}{=} h \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_i + k e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_i) \right]$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} h k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} k e_j) \quad \theta, \tilde{\theta} \in (0, 1)$$

$$\stackrel{L.}{=} h k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} k e_j) \quad \psi, \tilde{\psi} \in (0, 1)$$

x symmetria

$$g(t) = f(x_0 + t h e_i + k e_j) - f(x_0 + t h e_i)$$

DIVIDO PER $hK \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} h e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} h e_j)$$

PASSO AL LIMITE PER $h, K \rightarrow 0$ E USO LA CONTINUITÀ.

OSS: UN ENUNCIATO ANALOGO VALE PER
LE DERIVATE DI ORDINE K

OSS / ESERCIZIO: f È DIFF. 2 VOLTE IN $x_0 \Rightarrow$
 $D^2 f$ È SIMMETRICA

FORMULA DI TAYLOR

DEF: $f \in C^k(U) \Leftrightarrow f$ è DIFF. k VOLTE E $D^k f$ È CONT. IN U
 $(\Rightarrow) \exists \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \dots \partial x_k}$ IN U E SONO TUTTE CONTINUE

TEO $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $x_0 \in U$

① $f \in C^k(U) \Rightarrow$

$$f(x) = T_k(f, x_0)(x) + o(|x - x_0|^k) \leftarrow \text{RESTO DI PEANO}$$

DOVE $T_k(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0) [x - x_0]^i$

$\rightarrow$ POL. DI GRADO k IN $x_1 \dots x_n$

$$D^{(i)} f(x_0) [x-x_0]^i = \sum_{j_1 \dots j_i} \frac{\partial^{(i)} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} \cdot (x-x_0)_{j_1} \dots (x-x_0)_{j_i}$$

② $f \in C^k(U)$ $\in D \in \text{DIFF. } (k+1) \text{ VOLTE IN } U \Rightarrow$

$$f(x) = T_k(f, x_0)(x) + \frac{1}{(k+1)!} \underbrace{D^{(k+1)} f(z) [x-x_0]^{k+1}}_{O(|x-x_0|^{k+1})} \rightarrow \text{RESTO DI LAGRANGE}$$

$z \in (x_0, x)$

DIN

FISSO $x \in U$

$$\varepsilon \quad g(t) = f\left(x_0 + \overbrace{t(x-x_0)}^{x_t}\right), \quad t \in [0, 1]$$

APPLICO IL TEO DI TAYLOR A $g(t)$ IN $t=0$

$$\text{E OSSERVO CHE } g^{(i)}(t) = D^{(i)} f(x_t) [x-x_0]^i.$$

$$\text{IN PART, } T_k(f, x_0)(x) = T_k(g, 0)(1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) = g(1) &= T_k(g, 0)(1) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) \\ &= T_k(f, x_0)(x) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)} f(x_t) [x-x_0]^{k+1} \Rightarrow \textcircled{2} \end{aligned}$$

\textcircled{1} SI OTTIENE DA \textcircled{2} APPLICATO CON K AL POSTO DI $(K+1)$.

MASSIMI E MINIMI LOCALI

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$$

DEF: x_0 è DI MAX LOCALE SE $\exists r > 0$ T.C.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

x_0 è DI MIN LOCALE SE

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

TEO $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ DIFF. 2 VOLTE IN x_0

$$\nabla f(x_0) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad x_0 \text{ DI MAX LOCALE} \Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \leq 0$$

$$\textcircled{2} \quad x_0 \text{ DI MIN LOCALE} \Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \geq 0$$

$$\textcircled{3} \quad \nabla^2 f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ DI MAX LOCALE}$$

$$\textcircled{4} \quad \nabla^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ DI MIN LOCALE}$$

Din:

① SUPP. x ASS. CHE $\nabla^2 f(x_0)$ NON ≤ 0 ,
CIÒ È $\exists v \in \mathbb{R}^n$ T.C. $\nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$

$$g(t) = f(x_0 + tv) \quad g(0) = f(x_0)$$

$$g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0 \quad g''(0) = \nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$$

$\Rightarrow C$ È DI MIN LOCALE STRETTO PER $g \Rightarrow$

$$f(x_0 + tv) > f(x_0) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), t \neq 0 \quad \text{ASSURDO}$$

② SI FA CONE ①

$$\textcircled{3} \text{ SAPPIAMO CHE } \nabla f(x_0) = 0, \quad \nabla^2 f(x_0) < 0$$

$$\text{CI OGGI } \nabla^2 f(x_0)[v, v] \leq -\delta |v|^2 \quad \delta > 0 \quad \delta = \min_i |\lambda_i|$$

PER TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\nabla^2 f(x_0)}{2} [x - x_0]^2 + o(|x - x_0|^2)$$

$$\leq f(x_0) - \frac{\delta}{2} |x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2) \leq f(x_0) - \frac{\delta}{4} |x - x_0|^2$$

$$\text{SE } |x - x_0| \ll 1$$

$\Rightarrow x_0$ È UN MAX LOCALE STRETTO

$\textcircled{4}$ CONE $\textcircled{3}$

DEF: x_0 PUNTO CRITICO, CIOÈ $\nabla f(x_0) = 0$,

CHE NON È MAX LOCALE O MIN LOCALE

SI DICE PUNTO DI SELLA

AD ESEMPIO, SE $D^2 f(x_0)$ HA SIA AUTOVAL. > 0

SIA $< 0 \Rightarrow x_0$ È UN PUNTO DI SELLA



MASSIMI E MINIMI

OSS: SE $\nabla^2 f(x_0)$ È SIMMETRICO $\Rightarrow$

$$\nabla^2 f \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad \lambda_i \text{ AUTUVAL}$$

$$\nabla^2 f \leq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \lambda_i \leq 0 \quad \forall i$$

$$(n=2) \quad \nabla^2 f \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{aligned} \text{tr}(\nabla^2 f) &\geq 0 \\ \det(\nabla^2 f) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f \leq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{aligned} \text{tr}(\nabla^2 f) &\leq 0 \\ \det \nabla^2 f &\geq 0 \end{aligned}$$

DEF: $\text{tr}(\nabla^2 f(x_0)) =: \Delta f(x_0)$ SI CHIAMA LAPLACIANO DI f

DEF: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ DIFF. DUE VOLTE

SI DICE ARMONICA SE VERIFICA

$$\Delta f = 0 \quad \left(\text{EQ. DI LAPLACE} \right)$$

ES: $f(x,y) = ax + by + c$ $a^2 + b^2 \neq 0$
CERCHIANO MAX E MIN DI f SU $\overline{B_1(0)} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
 $\nabla f(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$ NON CI SONO PUNTI CRITICI
IL MAX E IL MIN ESISTONO (WEIERSTRASS)
E SONO SU $\partial B_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$

PARAMETRIZZAZIONE $\partial B_1 = \text{Im}(\gamma(t))$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

CERCHIANDO MAX/MIN DI $g(t) = f(\gamma(t))$

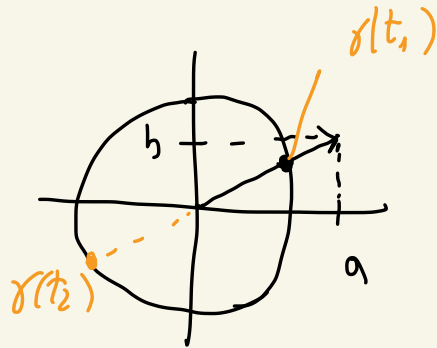
$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (a, b) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

$$\Leftrightarrow (\cos t, \sin t) \parallel (a, b)$$

t_1, t_2

$$\gamma(t_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\gamma(t_2) = -\gamma(t_1)$$



$$f(\gamma(t_1)) = \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

$$f(\gamma(t_2)) = -\sqrt{a^2 + b^2} + c$$

$\gamma(t_1)$ max di f

$\gamma(t_2)$ min di f

OSS: $f(x) = x \cdot v + w$ è ARMONICA
E NON HA PUNTI CRITICI SE $v \neq 0$

$f(x, y) = x^2 - y^2$ è ARMONICA
E HA 1 PUNTO CRITICO IN $(0, 0)$
CHE È UN PUNTO DI SELLA

PROP $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO

$f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ CONT., $f|_U$ DIFF. DUE VOLTE
E f ARMONICA $(\Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in U)$

$\Rightarrow f$ HA MAX E MIN GLOBALI SU ∂U .

Sin SUPP. CHE IL MIN DI f NON SIA SU ∂U

CIOE' $\exists x_0 \in U$ T.C. $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \bar{U}$
E $f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \partial U$

IN PART. $\exists \varepsilon > 0$ T.C. $f(x_0) \leq f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in \partial U$

QUINDI $\exists \varepsilon' > 0$ T.C.

$$f(x_0) < \min_{x \in \partial U} \left(f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2 \right)$$

CONSIDERO $g(x) = f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2$

$$g(x_0) < \min_{x \in \partial U} g(x) \Rightarrow g \text{ HA MINIMO IN } U$$

$\Rightarrow \exists x_1 \in U$ T.C. x_1 È MIN. ASSOLUTO DI g

$$\Rightarrow \nabla g(x_1) = 0, \quad \nabla^2 g(x_1) = \nabla^2 f(x_1) - 2\varepsilon' I_d \geq 0$$

PRENDENDO LA TRACCA

$$0 \leq \Delta f(x_1) - 2\varepsilon' n = -2\varepsilon' n$$

ASSURDO.

FUNZIONI INVERTIBILI

DONANDA: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

① QUANDO È INVERTIBILE?

② QUANDO È LOCALMENTE INVERTIBILE?

CIOÈ FISSATO $x_0 \in U$ $\exists V$ INT. DI x_0

E $W = f(V)$ INT. DI $f(x_0)$ T.C.

$f|_V$ È INVERTIBILE TRA $V \in W$

ASS: $(n=1)$ SE $f \in C^1(I)$ e $f'(x_0) \neq 0$ $x_0 \in I$
 $\Rightarrow f$ È LOC. INV. CON INV. C^1

TEO (INV. LOCALE)

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1

$x_0 \in U$ $\det(Df(x_0)) \neq 0$, cioè $Df(x_0)$ è invertibile,

$\Rightarrow \exists V$ int. di x_0 , $\exists W = f(V)$ int. di $y_0 = f(x_0)$,

$\exists g: W \rightarrow V$ di classe $C^1(W)$ T.c.

$g(f(x)) = x \quad \forall x \in V \quad \text{e} \quad Dg(y) = Df(x)^{-1} \quad \forall x \in V$
dove $y = f(x)$

DIM $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ INVERTIBILE, $A = Df(x_0)^{-1}$

CONSIDERIAMO $B_\rho(x_0)$ E $B_r(y_0)$ $y_0 = f(x_0)$

E ABBASTANZA PICCOLO T.C.

$$\|Df(x) - Df(x_0)\| \leq \frac{1}{2\|A\|}$$

(usando $f \in C^1$)

$$\text{E } r = \frac{\rho}{2\|A\|}.$$

OSS: IN QUESTA DIN., LA NORMA DI UNA MATRICE M

$$\text{E' } \|M\| = \max_{|v| \leq 1} |M \cdot v| \text{ E' UNA NORMA SU } M_{n,n}$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$$

VERIFICA: $\|A\| = \max_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$

$$\|AB\| = \max_{v \neq 0} \frac{|ABv|}{|v|} \leq \|A\| \cdot \max_{v \neq 0} \frac{|Bv|}{|v|}$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall y \in B_r(y_0)$

$\exists! x \in \overline{B_p(x_0)}$ T.C. $f(x) = y$.

FISSIAMO $y \in B_r(y_0)$ CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$T(x) = x + A(y - f(x))$$

$x \in \overline{B_p(x_0)}$

$$A = Df(x_0)^{-1}$$

PER CUI ABBIAMO SCELTO ρ, r
 T È UNA CONTRAZIONE SU $B_\rho(x_0)$

① VERIFICHIANO CHE T È $\frac{1}{2}$ LIPSCHITZ

$$\|DT(x)\| = \|Id - Df(x_0)^{-1} Df(x)\|$$

$$= \|Df(x_0)^{-1} (Df(x_0) - Df(x))\|$$

$$\leq \|A\| \cdot \|Df(x_0) - Df(x)\| \leq \frac{\|A\|}{2\|A\|} = \frac{1}{2}.$$

per la scelta di ρ

$$\textcircled{2} \quad T(\overline{B_\rho(x_0)}) \subseteq \overline{B_\rho(x_0)} \quad \text{Fissiamo } x \in \overline{B_\rho(x_0)}$$

$$|T(x) - x_0| \leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0|$$

$$\leq \frac{1}{2} |x - x_0| + |A(y - y_0)|$$

$$\leq \frac{\rho}{2} + \|A\| \cdot r = \frac{\rho}{2} + \frac{\|A\| \rho}{2 \|A\|} = \rho$$

$$\text{cioè } T(x) \in \overline{B_\rho(x_0)}.$$

PER IL TEO DELLE CONTRAZIONI $\exists! x = g(y) \in \overline{B_\rho(x_0)}$

$$\text{T.C. } f(x) = y$$

SIA $W = B_r(y_0) \setminus \underbrace{f(\partial B_p(x_0))}_{\text{COMPACTO}}$

INTORNO APERTO
DI y_0

$$V = g(W) = f^{-1}(W) \subseteq B_{\rho}(x_0)$$

V APERTO (DATO CHE $f|_E$ CONTINUA) $\in \chi_0 \in V$

$\Rightarrow f$ è una isomorfia tra V e W , e $g = f^{-1}|_W$.

VEDIANO ORA CHE g $\bar{5}$ CONTINUA IN $\mathbb{K}$

$$\lim_{y' \rightarrow y} g(y') - g(y) = 0 \quad \forall y \in W.$$

FISSIAMO $y \in W$ E

CHIAMIAMO $x' = g(y')$, $x = g(y) \in V$

SIA T LA MAPPA DEFINITA DAL PUNTO y

$$(T(x) = x + A(y - f(x)))$$

$T \in \frac{1}{2} \text{LIP.} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \|x - x'\| \geq \|T(x) - T(x')\| =$$

$$= \|x - x' + A(f(x') - f(x))\|$$

$$\geq \|x - x'\| - \|A(y' - y)\| \geq \|x - x'\| - \|A\| \cdot \|y - y'\|$$

$$\Rightarrow \|x - x'\| = \|g(y) - g(y')\| \leq 2\|A\| \cdot \|y - y'\|$$

$g \in 2\|A\| \text{-LIP.}$, IN PARTICOLARE È CONTINUA.

VEDIAMO ORA CHE g È DIFF. IN y

$$\text{E } Dg(y) = Df(x)^{-1}, \quad \text{DEVO VEDERE}$$

$$\frac{g(y') - g(y) - Df(x)^{-1}(y' - y)}{|y - y'|} \xrightarrow{y' \rightarrow y} 0$$

$$\overset{\text{cioè}}{x' - x = Df(x)^{-1}(f(x') - f(x))} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|} =$$

$$= \frac{\cancel{x' - x} - Df(x)^{-1} \left(\cancel{Df(x)}(x' - x) + o(|x' - x|) \right)}{|x' - x|} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|}$$

$$= o(1) \cdot \frac{|g(y') - g(y)|}{|y' - y|} = o(1) \xrightarrow{y' \rightarrow y} 0$$

$\downarrow$
 $\leq 2\|A\|$

$$\Rightarrow \exists Dg(y) = Df(x)^{-1}$$

OSS: $x \rightarrow Df(x) \in \text{CONT.} \Rightarrow x \rightarrow Df(x)^{-1} \in \text{CONT.}$
 $\in \text{INV.} \Rightarrow g \in C^1(W).$



Teo: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^k(\Omega)$ $k \geq 1$

$x_0 \in \Omega$ T.C. $J_f(x_0) = \det[Df(x_0)] \neq 0$

(cioè $Df(x_0)$ è INVERTIBILE)

$\Rightarrow f$ è un DIFFEOMORFISMO C^k IN UN INTORNO DI x_0 ,

cioè $\exists U$ INT. DI x_0 E V INT. DI $f(x_0)$ T.C.

$f|_U$ È UNA BIGEZIONE TRA U E V

con $f^{-1} \in C^k$. Inoltre $Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}$, $x \in U$.

OSS: LA CONDIZIONE $\det [Df(x)] \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$
NON GARANTISCE f GLOBALMENTE INVERTIBILE

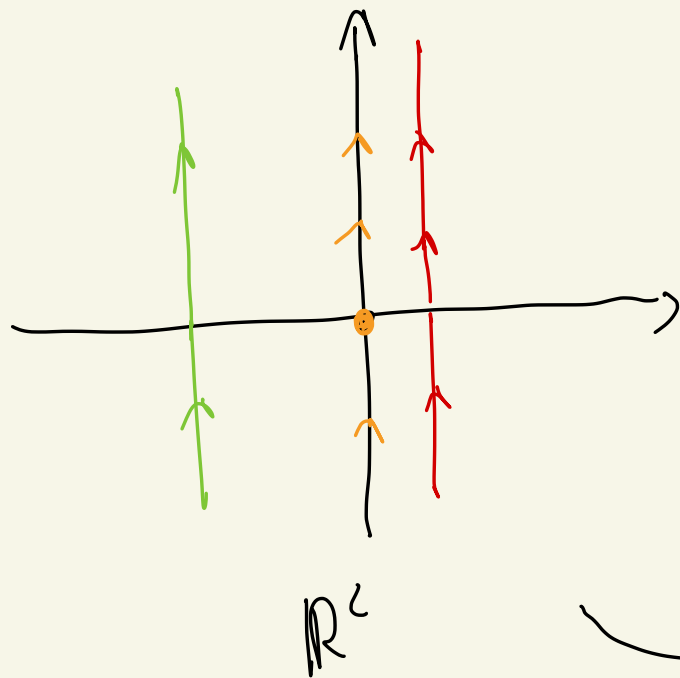
ES: (ESPONENZIALE COMPLESSO)

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \left(\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)) \right)$$

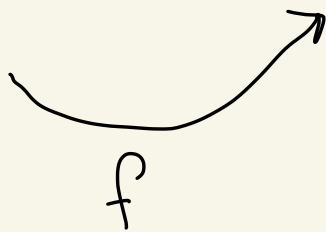
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \left(e^x \cos(y), e^x \sin(y) \right)$$

$$f(x, y + 2k\pi) = f(x, y) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

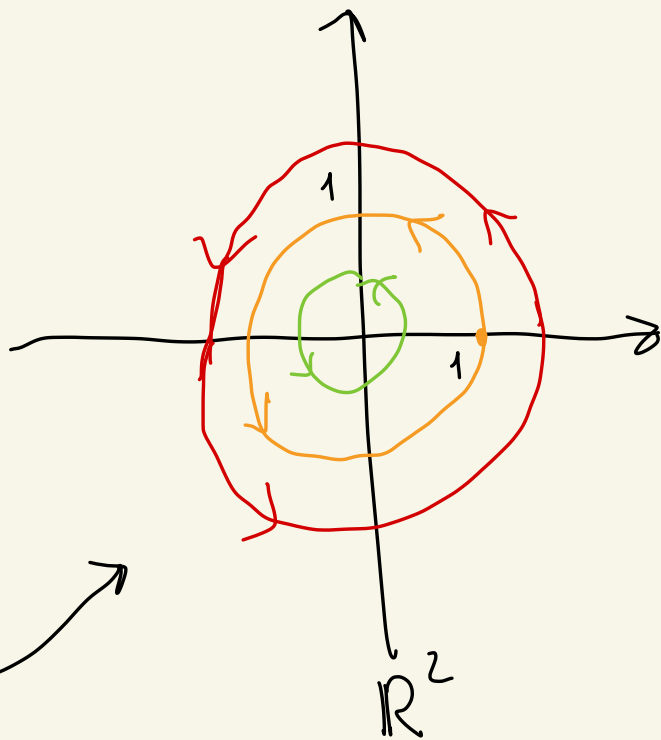
$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x, y) = e^{2x} > 0$$



$$f(x) \neq 0 \quad \forall x$$

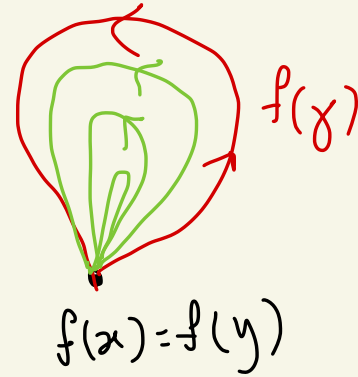
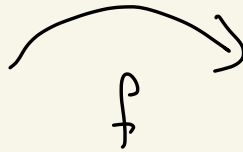
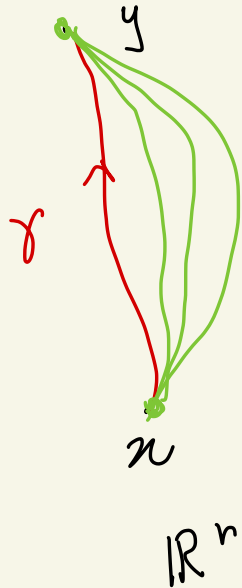


$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$



ARGOMENTO x INVERTIBILITÀ GLOBALE:

SUPP. $f(x) = f(y) \quad x \neq y$



TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

o TEOREMA DEL DINI

QUANDO POSSO ESPRIMERE $f(x, y) = 0$
IN FORMA "ESPLICITA" $y = g(x)$? (ALMENO LOCALMENTE)

TEOREMA: $f: \Omega \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\mathbb{R}^n} \times \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\mathbb{R}^m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ DI CLASSE C^k

$(x_0, y_0) \in \Omega$ T.C.

$$\det \left[D_y f(x_0, y_0) \right] \neq 0$$

↳ MATRICE $m \times m$

$$\Rightarrow \exists U \text{ INT. DI } x_0 \in V \text{ INT. DI } y_0$$

$$\text{ED } \exists g: U \rightarrow V \text{ DI CLASSE } C^k \text{ T.C.}$$

$$f(x, y) = f(x, y_0) \iff y = g(x)$$

$$\text{PER } (x, y) \in U \times V$$

$$\text{IN PARTICOLARE } f(x, g(x)) = 0 \text{ IN } U$$

QUINDI DIFF. IN x OTTENGO

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) \cdot Dg(x) = 0 \quad \text{CIOE'}$$

$$Dg(x) = - D_y f(x, g(x))^{-1} \cdot D_x f(x, g(x)) \quad \text{PER } x \in U.$$

DIN: DEFINIAMO

$$\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y)) \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & D_x f(x_0, y_0) \\ 0 & D_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ è LOC. INVERTIBILE, CIOÈ

$\exists U$ INT. DI x_0 , V INT. DI y_0 , W INT. DI y_0 T.C.

$\tilde{f}$ È UNA BIGEZIONE TRA $U \times V \in U \times W$

$$\text{ED } \exists \tilde{f}^{-1}(x, y) = (x, \tilde{g}(x, y)) \quad (x, y) \in U \times W$$

$\tilde{g}: U \times W \rightarrow V$ DI CLASSE C^k (TEO INV. LOCALE)

IN PARTICOLARE

$$(x, y) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y)) = \tilde{f}(x, \tilde{g}(x, y)) = (x, f(x, \tilde{g}(x, y)))$$

CIOÈ $f(x, \tilde{g}(x, y)) = y \quad \forall x \in U \in y \in W$

POSSIAMO $g(x) = \tilde{g}(x, f(x_0, y_0))$ DI CLASSE C^k

ABBIAMO $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ PER $x \in U$

CIOE $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ PER $y = g(x)$ E $x \in U, y \in V$.

COR: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

$x_0 \in \Omega$ $\text{rk}(Df(x_0)) = m$

$\Rightarrow \exists$ V INT. DI x_0 T.C.

$\{f(x) = f(x_0)\} \cap U$ È IL GRAFICO DI
UNA FUNZIONE C^k IN UN'OPR. BASE

DEF: I PUNTI DI $\{f(x) = f(x_0)\}$ CON $\text{rk}(Df(x_0)) = m$
SI DICONO PUNTI REGOLARI

ES: $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
LA CONDIZIONE DIVENTA $\nabla f(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \{f(x) = f(x_0)\}$ È IL GRAFICO DI

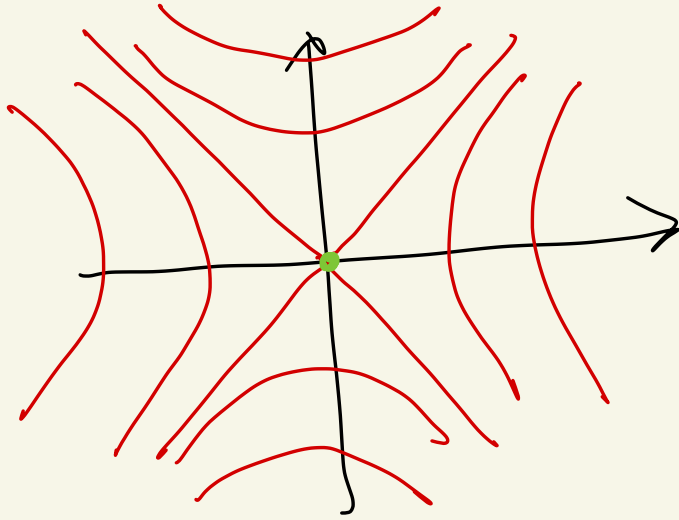
$$g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cdot e_i, \quad g(x_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0 \right)$$

ESERCIZIO: $f(x, y) = x^2 - y^2$

QUANDO $\{f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ È UNA CURVA REGOLARE?

SE $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, -2y_0) \neq 0$ CIOÈ $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$



ESERCIZIO: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = e^{xy} - x + y$

$$f(1, 0) = 0$$

- (1) $\{f=0\}$ È UN GRAFICO $y=g(x)$ VICINO A $(1,0)$?
- (2) QUAL È LO SVILUPPO DI T. DI g AL 2° ORDINE?

RISPOSTE:

(1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^{xy} + 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 > 0$

$\Rightarrow \exists g(x)$ con $g(1) = 0$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$

$\text{e } g'(1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y e^{xy} - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -1$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

② DOBBIAMO TROVARE $g''(x)$ IN $x=1$

$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

$$g''(x) = - \frac{f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x))g'(x)}{f_y(x, g(x))}$$

$$+ \frac{f_x(x, g(x)) \cdot [f_{xy}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x))g'(x)]}{f_y(x, g(x))^2}$$

$$f_x = y e^{xy} - 1$$

$$f_y = x e^{xy} + 1$$

$$f_{xx} = y^2 e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} + xy e^{xy}$$

$$f_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$f_{xx}(1,0) = 0$$

$$f_{xy}(1,0) = 1$$

$$f_{yy}(1,0) = 1$$

$$g''(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

LEZIONE 7

25/10/2022



SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^n$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ È UNA SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^n$ DI DIM. $K \in \{1, \dots, n\}$

SE $\forall x \in M \exists U$ INTORNO DI x

ED $\exists \varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ INIETTIVA E DI CLASSE C^1 ,

DOVE $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^k: |x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$

CON $\text{rk}(D\varphi) = K$ E $\varphi(B_1) = \Pi \cap U$.

$\text{Im}(D\varphi(x)) = T_x M \subseteq \mathbb{R}^n$ SOTTOSPAZIO DI DIM. K

SI CHIAMA SPAZIO TANGENTE A M IN x

$(T_x M)^\perp$ SI DICE SPAZIO NORMALE A M IN x

ES: $\Gamma = \Gamma_g \subseteq \mathbb{R}^n$ $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ DI CLASSE C^1
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto

$$\Gamma_g = \{ (x, g(x)) : x \in \Omega \}$$

OSS: TUTTE LE k -SOTTOVARIETÀ SONO LOCALMENTE GRATICI
 CON UNA SCELTA OPPORTUNA DELLE COORDINATE.

INFATTI $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ $\varphi_1: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $\varphi_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$



DATO CHE $\dim(D\varphi) = k$, SCEGLIENDO UNA BASE

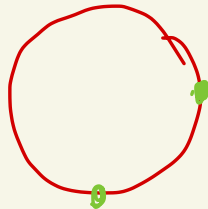
OPPORTUNA POSSO SUPPORRE $D\varphi_1$ INVERTIBILE $\Rightarrow$

φ_1 (loc.) INVERTIBILE

$$\psi = \varphi \circ \varphi_1^{-1}$$

$$\psi(x) = (x, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im } \psi = \text{Im } \varphi = \varphi_2 \varphi_1^{-1}$$



OSS: $M = \{f = c\}$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

Γ È UNA k -VARIETÀ IN TUTTI I PUNTI DOVE $\text{rk}(Df) = n-k$

LOCALMENTE $\Gamma = \Gamma_g$ $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ FUNZIONE IMPLICITA

CON $f(x, g(x)) = c$

$$T_x M = T_x \Gamma_g = \{ (v, Dg(x)v) : v \in \mathbb{R}^k \}$$

DALLA RELAZIONE $D_x f + D_y f \cdot Dg = 0$
 SI OTTIENE CHE $\text{Im}(Df)^T = \langle \nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-k} \rangle = (TM)^\perp$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

CERCO PUNTI STAZIONARI (MAX / MIN)

DI UNA FUNZIONE $f \in C^2(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

RISTRETTA AL VINCOLO (REGOLARE) $\Gamma = \{f=0\}$

$f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$

LA COND. PER f IN $x \in \Gamma$ DIVENTA $\nabla f(x) \in (T\Gamma)^\perp$
 $\Leftrightarrow \nabla f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x)$ λ_i SONO I
 MULTIPLICATORI DI LAGRANGE

TEO (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO $f_0 \in C^1(\Omega)$,

$f = (f_1, \dots, f_k) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$

$$\Pi = \{x \in \Omega : f(x) = c\}$$

$x_0 \in \Pi$ PUNTO DI MASSIMO O MINIMO LOCALE PER $f_0|_{\Pi}$

$\Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{0, \dots, k\}}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI,

CIOÈ $\exists \lambda_i$ NON TUTTI NULLI T.C. $\sum_{i=0}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0$

OSS: SE $\text{rk}(Df(x_0)) = k \Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ SONO LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ POSSO SCRIVERE $\nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0)$

IL SISTEMA

$$\begin{cases} f(x_0) = c \\ \nabla f(x_0) = \sum \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$$

SI CHIAMA SISTEMA DEI MOLT. DI LAGRANGE

QUESTA È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA.

DIN. SUPP. x_0 MINIMO LOCALE DI $f_0|_M$, SUPP. $C=0$,

$$\text{E SIA } B = B_r(x_0) = \{x \in \Omega : |x - x_0| < r\}$$

$$\text{T.C. } f_0(x_0) \leq f_0(x) \quad \forall x \in \bar{B} \cap M.$$

DATO $N > 0$ CONSIDERIAMO

$$g_N(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + N \sum_{i=1}^k f_i(x)^2$$

$$f_N(x) \geq f_0(x) \quad \text{e} \quad f_N(x_0) = f_0(x_0)$$

$\Rightarrow x_0$ è minimo di f_N in $M \cap \overline{B}$

sia x_N il minimo assoluto di f_N in $\overline{B}$.

per compattezza $x_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} x^* \in \overline{B}$, a meno di sottosucc.

inoltre $f_N(x_N)$, che è limitata, converge a $d \in \mathbb{R}$.

$$N \sum_{i=1}^k f_i(x_N)^2 = f_N(x_N) - f_0(x_N) - |x - x_0|^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} d - f_0(x^*) - |x^* - x_0|^2$$

$$\text{dividendo per } N \quad \sum_i f_i(x_N)^2 \rightarrow \sum_i f_i(x^*)^2 = 0 \Rightarrow x^* \in M$$

SCRIVIAMO

$$f_0(x_N) + |x_N - x_0|^2 \leq g_N(x_N) \leq g_N(x_0) = f_0(x_0) \leq f_0(x^*)$$

$\downarrow$

$$f_0(x^*) + |x^* - x_0|^2 \Rightarrow |x^* - x_0|^2 = 0 \quad \text{cioè}$$

$$x_0 = x^* = \lim_N g_N(x_N).$$

PER FERMAT

$$\nabla g_N(x_N) = 0 = \nabla f_0(x_N) + 2(x_N - x_0) + 2N \sum_i f_i(x_N) \nabla f_i(x_N)$$

$$\text{SIA } \mu_0^N = 1 \quad \mu_i^N = 2N f_i(x_N)$$

$$\sum_{i=0}^K \mu_i^N \nabla f_i(x_N) = -2(x_N - x_0)$$

NORMALIZZIAMO E DEFINIAMO $\tilde{\mu}_i^N = \frac{\tilde{\mu}_i}{\sqrt{\sum_j \mu_j^2}} \in [-1, 1]$

→ ≥ 1

$$\tilde{\mu}_i^N \rightarrow \lambda_i \quad \text{T.C.} \quad \sum_{i=0}^K \lambda_i = 1$$

$$\sum_i \tilde{\mu}_i^N \nabla f_i(x_N) = - \frac{2 \cdot (x_N - x_0)}{\sqrt{\sum_j \mu_j^2}} \xrightarrow{N} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^K \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0 \quad \left(\text{con } \sum_{i=0}^K \lambda_i^2 = 1 \right).$$

ES: $f(x) = \sum_{i=1}^n e^{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = |x|^2 - 1$ (PER CASA $|x|^2 - R^2$)

$\Omega = \{g=0\} = \partial B_1$

TROVARE MAX/MIN DI $f|_{\Omega}$.

SISTEMA DEI M.L.

$$\begin{cases} \sum_i x_i^2 = 1 \Rightarrow x_i \in [-1, 1] \forall i \\ e^{x_i} = 2\lambda x_i \quad \forall i \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } x_i \neq 0 \quad \forall i \end{cases} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = e^{x_i}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i \right)$$

DIVIDENDO PER x_i HO

$$2\lambda = \frac{e^{x_i}}{x_i} = \frac{e^{x_j}}{x_j} \quad \forall i, j$$

$$-1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i$$

$$q|_{[-1,1]} \text{ INIETTIVA}$$

$$\Rightarrow x_i = x_j \quad \forall i \quad \left(\text{QUI MI È SERVITO } R=1 \right)$$

$$\text{DA } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \text{ OTTIENGO } x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i \quad \text{ o } \quad x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i$$

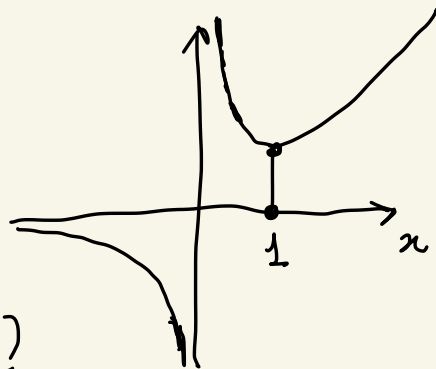
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} > f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

↓
MAX ASSOLUTO

↓
MIN. ASSOLUTO

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$





DOMANDE TIPICHE IN UNO SCRITTO:

$$M = \{g(x) = 0\} \quad \text{SOTTOVARIETÀ / VINCOLO}$$

$$g = (g_1, \dots, g_k) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad (k < n)$$

- ① QUALI SONO I PUNTI REGOLARI DI M
 $(x \in M \text{ t.c. } \text{rk}(Dg(x)) = k)$
- ② TROVARE $T_x M$ o $(T_x M)^\perp$
 $((T_x M)^\perp = \langle \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_k(x) \rangle)$
- ③ TROVARE max/min di $f|_M$ con $f \in C^1(\Omega)$
(MOLT. DI LAGRANGE)

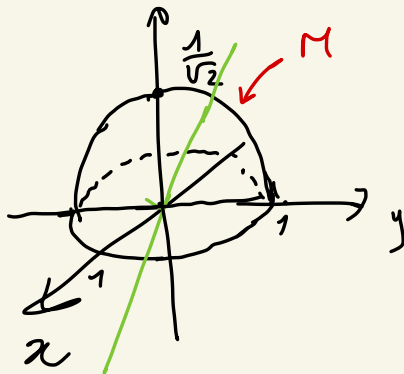
ESERCIZIO:

$$f(x, y, z) = y(x+z)$$

$$M = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

MAX/MIN di $f|_M$

∃ PER W.



CERCHIAMO I PUNTI CRITICI IN $\overset{0}{M}$

$$\nabla f = (y, x+z, y)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0$$

PUNTI DI SELLA

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MAX E MIN SONO SU ∂M .

CERCHIAMO I PT CRITICI SUL vincolo $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z \geq 0 \\ y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = 2\lambda z \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \nabla g = (x, y, 2z)$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow y = x + z = 0 \Rightarrow f = 0$$

Posso supp. $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = 2z \\ \frac{x+z}{y} = \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{x}{2} \\ y^2 = x(x+z) = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^2}{2} = 3x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq z = \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

GUARDIANO $\Pi \cap \{z=0\} = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}$

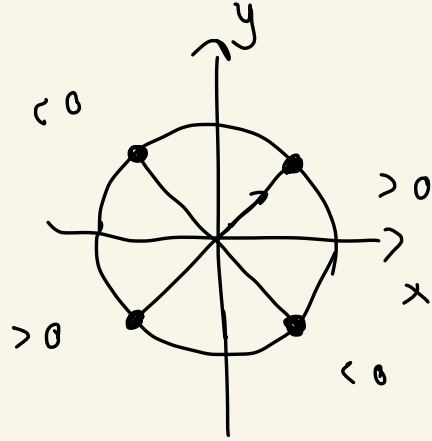
$$f(x,y,0) = x \cdot y$$

$\max f|_{\Pi \cap \{z=0\}}$ È ASSUNTO IN $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\in f = \frac{1}{2}$

$\min$ IN $\pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in f = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \max f = \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\min f = -\frac{\sqrt{6}}{4}$



ES: SIA $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{x^2 + y^2 = x\}$

① DIRE SE Γ È UNA CURVA REGOLA.

② CALCOLARE LA MIN DISTANZA DI Γ DA $(0, 1, 0) = P$

① $\Gamma = \{g_1 = 0, g_2 = 0\}$

$$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

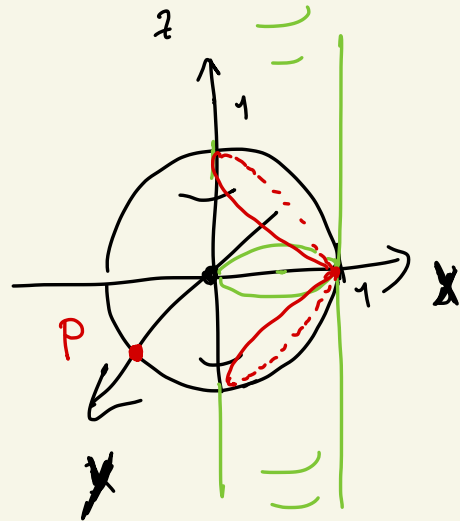
$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$$

$z \neq 0 \quad \nabla g_1 \perp \nabla g_2$ LIN. INDIP.

$z = 0 \Rightarrow x=1, y=0 \quad \nabla g_1 = (2, 0, 0) \neq \nabla g_2 = (1, 0, 0)$

$$g_2 = x^2 + y^2 - x$$

$$\nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$$



② max/min di $f(x, y, z) = |(x, y, z) - P|$
 $= \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$

rispetto a Π .

È EQUIV. A CERCARE max/min di $f^2|_{\Pi}$

$$f^2(x, y, z) = h(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 1$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{su } M \end{array} = -2y + 2$$

È EQUIV. A CERCARE max/min di $-y|_M$

$$w(x, y, z) = -y$$

$$\nabla w = (0, -1, 0)$$

$$\nabla w = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$$

$$(x, y, z) \neq (1, 0, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 (2x-1) = \lambda_2 (2x-1) \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$-1 = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2\lambda_2 y$$

$$0 = 2\lambda_1 z \rightarrow z=0 \text{ or } \lambda_1=0 \rightarrow \boxed{\lambda_1=0}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 + y^2 - x = 0 \rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$w(1, 0, 0) = 0$$

$$w = \frac{1}{2} \text{ max}$$

$$w = -\frac{1}{2} \text{ min}$$

$$w = \frac{1}{2} \text{ max}$$

$$w = -\frac{1}{2} \text{ min}$$

ES: max/min $\Rightarrow f(x) = \sum_{i < j} (x_i^2 + x_j^2)^{\frac{1}{2}}$

sw $\partial B_R = \{ |x|^2 - R^2 = 0 \}$ $g(x) = \sum_i x_i^2 - R^2$

$f > 0$ sw $\partial B_R \in \Delta n \in \mathbb{R}^n$ max/min per W

SISTEMA M.L.

$$\begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 2\lambda x_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$\text{Supp. } x_i \neq 0 \Rightarrow 2\lambda = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$\text{s.t. } x_i \neq 0 \quad \forall i \Rightarrow \sum_{j \neq i} \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + x_j^2}} \quad \forall i, k$$

GUARDIANO $n=3$

$$\text{Supp. } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \text{"} \quad \quad \quad = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x^2 + z = y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{max} \\ x^2 = y^2 = z^2 = \frac{R^2}{3} \\ f(x, y, z) = \sqrt{6} \cdot R \end{array}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$f(0, 0, \pm R) = 2R \rightarrow \underline{\text{min}}$$

↳ 5 PERMUTATIONEN

$$\begin{cases} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) = 2\lambda x \\ y \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda y \\ z \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda z \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \text{power supp. } y \neq 0, z \neq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(0, \pm \frac{R}{\sqrt{2}}, \pm \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = (1 + \sqrt{2})R$$

$$(0, 0, \pm R)$$

$$2R < (1 + \sqrt{2})R < \sqrt{6}R$$



TEORIA DELLA MISURA

OBIETTIVO: MISURARE IL "VOLUME"
DI UN SOTTOINSIEME $E \subseteq \mathbb{R}^n$,
o INTEGRARE FUNZIONI $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
CON NOZIONI STABILI PER PASSAGGIO
AL LIMITE

X INSIEHE

$(X, \mathcal{E}, m)$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$

DEF: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ SI DICE σ -ALGEBRA SE

① $\emptyset \in \mathcal{E}$

② $E \in \mathcal{E} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{E}$ (IN PART. $X \in \mathcal{E}$)

③ $E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_i E_i \in \mathcal{E}$ (IN PART. $\bigcap_i E_i \in \mathcal{E}$)

ES: $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$

OSS: L'INTERSEZIONE, ANCHE INFINITA, DI σ -ALG.
È UNA σ -ALG.

IN PARTICOLARE, DATO $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$

POSSIAMO DEFINIRE

$$\sigma A(\mathcal{G}) = \{ \cap \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ } \sigma\text{-ALG.}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} \}$$

ES: X SP. METRICO (σ TOPOLOGICO), $\mathcal{A} = \{ \text{APERTI IN } X \}$

POSSO CONSIDERARE $\mathcal{B}(X) = \sigma A(\mathcal{A})$

LA σ -ALG. DEI BORELIANI, σ INSIEMI DI **B**OREL

OSS: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ PER UN FATTO DI CARDINALITÀ:

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c \quad c = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$$

$$|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = |A| = c$$

↑

DEF: $\mathcal{E}$ σ -ALG., $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$

① m È σ -SUBADDITIVA SE $m\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum m(E_i)$
 $\forall E_i \in \mathcal{E}$

② m È σ -ADDITIVA SE $m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum m(E_i)$
SE $E_i \cap E_j = \emptyset$ PER $i \neq j$

UNA TALE m SI DICE MISURA SU X

E $(X, \mathcal{E}, m)$ SI DICE SPAZIO DI MISURA

OSS: m MISURA $\Rightarrow$

$$\textcircled{1} m(\emptyset) = 0$$

$$\textcircled{2} m \text{ SUBADDITIVA}$$

$$\textcircled{3} m \text{ MONOTONA: } A \subseteq B \Rightarrow m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$$

$$\textcircled{4} E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow m\left(\bigcup_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i)$$

$$\textcircled{5} E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow m\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i)$$

DEF: $N \in \mathcal{E}$ T.c. $m(N) = 0$ SI DICE **TRASCURABILE**

OSS: N TRASCURABILE, $N' \subseteq N$, $N' \in \mathcal{E} \Rightarrow N'$ TRASCURABILE

DEF. $(X, \mathcal{E}, m)$ si dice **completo**,
se $N' \subseteq N$, N trascurabile $\Rightarrow N' \in \mathcal{E}$

METODO DI CARATHÉODORY

DEF. $m: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ σ -SUBADD. si dice
MISURA ESTERNA

TEOREMA: X INSIEME, m MISURA ESTERNA

$E \subseteq X$ si dice MISURABILE SE

$$m(A) = m(E \cap A) + m(A \setminus E) \quad \forall A$$

ALLORA $\mathcal{E}_m = \{E \subseteq X: E \text{ MISURABILE}\}$ È UNA σ -ALGEBRA,

$m|_{\mathcal{E}_m}$ È UNA MISURA E

$(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$ È UNO SPAZIO COMPLETO.

TEOREMA: $(X, \mathcal{E}, m)$ SPAZIO DI MISURA $\Rightarrow$

$m^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ DEFINITA DA

$m^*(E) = \inf \{ m(F) : F \supseteq E, F \in \mathcal{E} \}$ È UNA MISURA
ESTERNA E $m^*/_{\mathcal{E}} = m$.

INOLTRE $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{m^*}$ E $(X, \mathcal{E}_{m^*}, m^*/_{\mathcal{E}_{m^*}})$ È UNO SP.

DI MISURA COMPLETO CHE ESTENDE $(X, \mathcal{E}, m)$.

OSS: $(X, \mathcal{E}, m)$ SP. DI MISURA

$$\overline{\mathcal{E}} = \{ E \cup N' : E \in \mathcal{E}, N' \subseteq N, N \text{ TRASCURABILE} \}$$

È UNA σ -ALGEBRA CHE CONTIENE $\mathcal{E}$.

$$\overline{m} : \overline{\mathcal{E}} \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{DEF. DA} \quad \overline{m}(E \cup N') = m(E)$$

È UNA MISURA CHE ESTENDE m ,

INOLTRE $(X, \overline{\mathcal{E}}, \overline{m})$ È COMPLETO

ED È LA PIÙ PICCOLA ESTENSIONE COMPLETA.

NON È DETTO CHE $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{m^*}$.

MISURA DI LEBESGUE

$$X = \mathbb{R}^n$$

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{RETTANGOLO}$$

$$m^*(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset \quad \text{PER } i \neq j \quad \begin{array}{l} \text{PLURIRETT.} \\ \text{NUMERABILE} \end{array}$$

OSS: TUTTI GLI APERTI SONO PLURIRETT. NUMERABILI

$$m^*(P) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(R_i)$$

$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ DEFINISCO

$$m^*(E) = \inf \left\{ m^*(P) : P \supseteq E \text{ PLURISETT. NUMERABILE} \right\}$$

PROP: m^* È σ -SUBADDITIVA E

SI DICE MISURA ESTERNA DI LEBESGUE.

DEF: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{m^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ È LA

σ -ALG. DEGLI INSIEMI MISURABILI SECONDO L .

$\mathcal{L} = m^* \Big|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ SI DICE MISURA DI LEBESGUE.

PROP: I RETTANGOLI SONO MISURABILI

$\Rightarrow$ GLI APERTI SONO MISURABILI

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ CIOÈ $\mathcal{L}$ È DI BOREL.

OSS: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ E $\mathcal{L} / \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ NON È COMPLETA.

INFATTI $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c < |\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$.

BASTA VEDERE CHE $\exists C \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO,
TRASCURABILE E PIÙ CHE NUMERABILE.

($n=1$) C INSIEME DI CANTOR VA BENE.

PROP. (SUPPONENDO L'ASSIOMA DELLA SCELTA)

$$M(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

DIN. ($n=1$) INSIEME DI VITALI.

$x \sim y$ SE $x-y \in \mathbb{Q}$ RELAZIONE DI EQ.

$[x] = \{x+q : q \in \mathbb{Q}\}$ CLASSE DI EQ. DI $x \in \mathbb{R}$

SCEGLIANO $E \subseteq [0, 1)$ T.C. $E \cap [x] = \{y(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

DICO CHE E NON È MISURABILE.

SIA $F = \{U(E+q) : q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$

OSSERVIANO CHE $(E+q_1) \cap (E+q_2) = \emptyset.$

$$F \subseteq [-1, 2) \Rightarrow m^*(F) \leq 3$$

$$F \supseteq [0, 1) \quad \text{INFATTI} \quad y \in [0, 1) \Rightarrow y \in [x] \quad \text{PER } x \in E$$

$$\Rightarrow y \in E + (y-x) \quad \text{in } \mathbb{Q}$$

SE E FOSSE MISURABILE $\Rightarrow$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}([0, 1)) = 0 \quad \text{ASSURDO}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

$$\Rightarrow E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

LEZIONE DEL

9/11/2022



PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

DEF: $(X, \mathcal{E}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA,

X SPAZIO METRICO, μ MISURA DI BOREL

$\Rightarrow \mu$ È REGOLARE SE

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \left\{ \mu(A) : A \supseteq E \text{ APERTO} \right\} \\ &= \sup \left\{ \mu(K) : K \subseteq E \text{ COMPATTO} \right\} \end{aligned} \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

PROP: LA MISURA DI LEB. IN $\mathbb{R}^n$ È REGOLARE.

Def: ① $L(E) = \inf \left\{ L(P) : P \supseteq E \text{ PLURI RETT. NUM.} \right\}$

$\forall P = \bigcup_i R_i \text{ PLURI RETT.} \quad \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\exists P_\varepsilon = \bigcup_i R_{\varepsilon,i} \quad R_{\varepsilon,i} \supseteq R_i \text{ RETTANGOLI } \underline{\text{APERTI}}$

T.C. $L(R_{\varepsilon,i}) \leq L(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow L(P_\varepsilon) \leq L(P) + \varepsilon.$

$\Rightarrow L(E) = \inf \left\{ L(P_\varepsilon) : P_\varepsilon \supseteq E, \varepsilon > 0 \right\}$

② OSSERVIAMO CHE

$$E = \bigcup_n E \cap B_n(0)$$

$$L(E) = \lim_n L(E \cap B_n(0))$$

POSSO SUPPORRE E LIMITATO

CONSIDERO L'INSIEME MISURABILE $\overline{E} \setminus E$

PER ① $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_\varepsilon \ni \overline{E} \setminus E$ T.C.

$$L(\Delta_\varepsilon) \leq L(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon.$$

DEFINIAMO $K_\varepsilon = \overline{E} \setminus A_\varepsilon = \overline{E} \cap \Delta_\varepsilon^c = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E$

K_ε compatto

$$\mathcal{L}(K_\varepsilon) = \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(E \cap A_\varepsilon)$$

$$= \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(A_\varepsilon) + \mathcal{L}(A_\varepsilon \setminus E)$$

✓
misurabilità di E

$$\geq \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(A_\varepsilon) + \mathcal{L}(\overline{E} \setminus E)$$

$$\geq \mathcal{L}(E) - \varepsilon.$$

DEF. COSTRUTTIVA DELLA MISURA DI LEBESGUE

$$P = \bigcup_{i=1}^N R_i \quad \text{PLURIRETT.} \quad (\text{FINITO})$$

$$\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset \quad \text{PER } i \neq j$$

$$L(P) := \sum_{i=1}^N L(R_i) \quad \forall P$$

$$L(A) := \sup \left\{ L(P) : P \subseteq A \text{ PLURIRETT. FINITO} \right\}$$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$$L(K) := \inf \left\{ L(P) : P \supseteq K \text{ PLURIRETT.} \right\} \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$$

COMPATTO

DATO $E \subseteq \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO

$$\mathcal{L}^*(E) := \inf \{ \mathcal{L}(A) : A \supseteq E \text{ APERTO} \}$$

MISURA ESTERNA DI LEB. (È QUELLA DEFINITA
IN PRECEDENZA)

$$\mathcal{L}_*(E) := \sup \{ \mathcal{L}(K) : K \subseteq E \text{ COMPATTO} \}$$

MISURA INTERNA DI LEB.

OSS: $\mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E)$ PER OGNI E

DEF. E è MISURABILE SE $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_*(E) =: \mathcal{L}(E)$.

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ MISURABILI}\}.$$

TEO. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una σ -ALG. CHE CONTIENE $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
↑
BORELIAN

$\mathcal{L} := \mathcal{L}^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ è una MISURA, CIOÈ È σ -ADD.,
E SI DICE MISURA DI LEB.

TEO: $m(\mathbb{R}^n)$ COINCIDE CON LA σ -ALG.

DEFINITA DAL CRITERIO DI CARATHÉODORY.

OSS: POTREMMO DEFINIRE

$$m_J^*(E) = \inf \left\{ L(P) : P \supseteq E \text{ PLURIRETT.} \right\}$$

$$m_{J*}(E) = \sup \left\{ L(P) : P \subseteq E \text{ " } \right\}$$

$$\text{SI HA } m_J^*(E) \geq L^*(E) \geq L_*(E) \geq m_{J*}(E) \quad \forall E.$$

E T.C. $m_J^*(E) = m_{J*}(E)$ SI DICE MISURABILE SECONDO JORDAN.

QUESTA CLASSE DI INSIEMI NON È UNA σ -ALG.

E $\mathcal{L}^*$ NON INDUCE UNA MISURA.

INOLTRE m_J^* NON È UNA MISURA ESTERNA IN $\mathbb{R}^n$.

ES: $E = \mathbb{Q}_n \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

E NUMERABILE $\Rightarrow E$ MISUR. CON $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^*(E) = 0$.

INOLTRE $m_{J*}(E) = 0$, PERÒ SI HA $m_J^*([0,1]) = \mathcal{L}([0,1]) = 1$

$\Rightarrow E$ NON È JORDAN-MISURABILE.

TEOREMA: m MISURA DI BOREL IN $\mathbb{R}^n$

T.C. $m(K) < +\infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto

$$m(E+z) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \exists c \geq 0 \text{ T.C. } m(E) = c L(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

OSS: USERE LA NOTAZIONE

$|E|$ PER INDICARE $L(E)$ CON $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

FUNZIONI MISURABILI E INTEGRAZIONE

DEF: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ SPAZI DI MISURA

$f: X \rightarrow Y$ È MISURABILE SE

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

DEF: $[Y = \mathbb{R}^n, \nu = \mathcal{L}]$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ SP. DI MISURA

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ È LEBESGUE MISURABILE SE

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

(non $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$)

DEF: $[X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n]$

① $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $E \subseteq \mathbb{R}^m$ MISURABILE,

E' $\in$ LEB. MISURABILE SE

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

② $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E di BOREL, E' BORELIANA
se $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$

ES: $\exists f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ CONTINUA ED $\exists N \subseteq [0,1]$ MIS.

T.C. $f^{-1}(N)$ NON $\in$ MISURABILE.

SIA $K(x)$ LA SCALA DI CANTOR

$$E \quad g(x) = \frac{K(x) + x}{2}.$$

$g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ CONTINUA E STR. CRESCENTE.

$$K(C) = [0,1] \Rightarrow |g(C)| > 0$$

$\exists N \subseteq C$ T.C. $g(N) \subseteq g(C)$ NON È MISURABILE

$f(x) = g^{-1}(x)$ CONT. E STR. CRESCENTE È T.C.

$$f^{-1}(N) = g(N) \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

GUARDIANO $m(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ MISURABILI}\}$

OSS: $f \in m(X) \Leftrightarrow f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{M} \text{ MIS. } \forall \Delta \subseteq \mathbb{R} \text{ APERTO}$

$\Leftrightarrow \{f > t\} \in \mathcal{M} \text{ MIS. } \forall t \in \mathbb{R}$

PROPOSIZIONE:

① $m(X)$ è UNO SP. VET. su $\mathbb{R}$, cioè

$f, g \in m \Rightarrow f+g \in m \text{ e } \lambda f \in m \text{ } \forall \lambda \in \mathbb{R}$

② $f, g \in m \Rightarrow f \cdot g \in m \text{ e } f/g \in m \text{ se } g(x) \neq 0 \text{ } \forall x$
[$\tilde{\forall} x \in X = \forall x \in X \setminus N \text{ con } \mu(N) = 0$]

$$\textcircled{3} \quad f_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{M}, \quad \inf_n f_n \in \mathcal{M}$$

$$\limsup_n f_n \in \mathcal{M}, \quad \liminf_n f_n \in \mathcal{M}$$

$$\text{IN PART. SE } f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow f \in \mathcal{M}$$

Din. $\textcircled{1} \quad \{f+g > t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f > q\} \cap \{g > t-q\} \quad \text{MEASURABLE}$

$$\{\lambda f > t\} = \begin{cases} \{f > t/\lambda\} & \lambda > 0 \\ \{f < t/\lambda\} & \lambda < 0 \end{cases} \quad \text{MEAS.}$$

② GUARDIANO f^2

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{se } t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{n.s.}$$

$$\Rightarrow f^2 \in \mathcal{M}$$

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{M} \quad \text{PER } \textcircled{1}$$

$$f/g = f \cdot \frac{1}{g} \quad \text{BASTA VEDERE } \frac{1}{g} \in \mathcal{M}$$

$$\left\{ \frac{1}{g} > t \right\} = \left\{ g < \frac{1}{t} \right\} \quad \text{n.s.}$$

$$\textcircled{3} \quad \left\{ \sup_n f_n > t \right\} = \bigcup_n \{f_n > t\} \quad \text{n.i.s.}$$

$$\inf_n f_n = - \sup_n (-f_n) \quad \text{n.i.s.}$$

15/11/2022



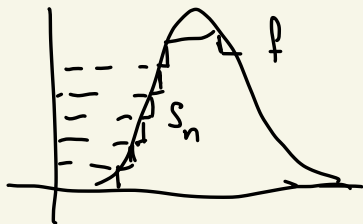
INTEGRALE $(X, \mathcal{E}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA

DEF: $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ È SEMPLICE SE
 $\exists E_1 \dots E_n \in \mathcal{E}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ PER $i \neq j$,
E $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ T.C.

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$$

PROP: $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \geq 0 \Rightarrow$
 $\exists$ UNA SUCC. S_n DI FUNZIONI SEMPLICI, CON $S_{n+1} \geq S_n \geq 0$,
T.C. $\lim_n S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.

Dln.



$$S_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{\{f \geq n\}},$$

$$E_{n,i} = \left\{ \frac{i-1}{2^n} \leq f < \frac{i}{2^n} \right\} \\ 1 \leq i \leq n2^n$$

$$S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x.$$

OSS: $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow S_n \rightarrow f$ UNIF, cloE^1

$$0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{2^n} + \max \left(0, \sup_X f - n \right) \xrightarrow{n} 0$$

OSS: f NON POSITIVA $\Rightarrow f = f^+ - f^-$

$\exists s_n$ SEMPLICE T.C. $s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$.

DEF (INTEGRALE)

$s \in \mathcal{M}$ SEMPLICE, $s \geq 0 \Rightarrow \int_X s \, d\mu := \sum c_i \mu(E_i)$

$f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ SEMPLICE} \right\}$

$f \in \mathcal{M} \Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$ SE NON VALGONO ENTRAMBI $+\infty$

DEF: $f \in \mathcal{M}$ è INTEGRABILE se $\int f^+ < +\infty$ e $\int f^- < +\infty$.

PROPRIETÀ: $f, g \in \mathcal{M}$ con l'int. ben definito $\Rightarrow$

① $\int f+g = \int f + \int g$, $\int c \cdot f = c \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$

cioè l'integrale è LINEARE

② $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ monotonia

③ $a \leq f \leq b \quad \forall x$ con $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $a \mu(X) \leq \int f \leq b \mu(X)$

$$④ \quad |\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

$$⑤ \quad A \in \mathcal{E} \quad \int_A f := \int_X f|_A \quad \text{CHE È BEN DEFINITO}$$

$$⑥ \quad N \in \mathcal{E} \quad \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f = 0$$

OSS: f INT. $(\Leftrightarrow) |f|$ È INTEGRABILE

DEF: $L^1(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ INTEGRABILI} \}$ SP. VETTORIALE

$L^1(X) = L^1(X) / \sim$ DOVE $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$

$(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ È UNO SPAZIO NORMATO

con $\|f\|_1 = \int |f|$

[VEDREMO CHE È UNO SP. DI BANACH]

TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

PROP. $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \nu(E) = \int_E f \, d\mu$
è una misura su $(X, \mathcal{E})$

DIM. DOBBIAMO VEDERE CHE ν È σ -ADDITIVA,
CIÒ È $\nu(\cup E_i) = \sum \nu(E_i)$ DOVE
 $E_n \in \mathcal{E}$ DISGIUNTI A DUE A DUE.

$$\text{SE } f = \chi_A, A \in \mathcal{E} \Rightarrow$$

$$v(E) = \mu(E \cap A) \Rightarrow$$

$$v(\cup E_i) = \mu(\cup E_i \cap A) = \sum_i \mu(E_i \cap A) = \sum_i v(E_i)$$

μ MISURA

$\Rightarrow$ LA TESI È VERA SE f È SEMPLICE

IN GENERALE, DATA $0 \leq s \leq f$ SEMPLICE,

$$\int_E s = \sum_i \int_{E_i} s \leq \sum_i \int_{E_i} f = \sum_i v(E_i)$$

FACENDO IL "SUP" IN s OTTENGONO $v(E) \leq \sum_i v(E_i)$.

VICEVERSA, DATI DUE INSIEMI $A, B \in \mathcal{E}$
ED $\varepsilon > 0$.

SIANO S_A E S_B SEMPLICI T.C.

$$\int_A S_A \geq \int_A f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \int_B S_B \geq \int_B f - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v(A \cup B) \geq \int_{A \cup B} S_A|_A + S_B|_B \geq v(A) + v(B) - \varepsilon$$

SEMPLICE

$$\Rightarrow v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$$

IN PARTICOLARE

$$v(E) \geq v\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \geq \sum_{i=1}^N v(E_i)$$

↑
NONOTONIA
DELL'INTEGRALE

$$\Rightarrow v(E) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E_i)$$

COR: $E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$, $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_{\bigcup_n E_n} f = \lim_n \int_{E_n} f$$

TEO. DI CONVERGENZA MONOTONA (DI BEPPO LEVI)

$$f_n \in M, \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \quad f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$$

$f \in M$

$$\Rightarrow \int_X f = \lim_n \int_X f_n = \sup_n \int_X f_n.$$

Din $f \geq f_n \quad \forall n \Rightarrow \int f \geq \int f_n.$

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\int f \leq \lim_n \int f_n$

SIA $0 \leq s \leq f$ SEMPLICE, SIA $\varepsilon > 0$

È SIA $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)s\} \subseteq E_{n+1}$

INOLTRE $X = \bigcup_n E_n$ INFATTI $\forall x \in X$

$$s(x) \leq f(x) = \lim f_n(x)$$

o $f(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$

$$\sigma \quad f(x) > 0 \Rightarrow (1-\varepsilon)S(x) < f(x) \Rightarrow$$

$$(1-\varepsilon)S(x) < f_n(x) \quad \text{DEF. in } n$$

$$\Rightarrow x \in E_n \quad \text{DEF. in } n$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)S = (1-\varepsilon) \int_{E_n} S$$

$$\Rightarrow \lim_n \int_X f_n \geq (1-\varepsilon) \lim_n \int_{E_n} S = (1-\varepsilon) \int_{X=\cup E_n} S \geq \int_X f.$$

sup in S
lim in C
↓

COR $f_n \in \mathcal{M}, f_n \geq 0 \Rightarrow \int_X \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$

LEMMA DI FATOU

$f_n \in \mathcal{M}, f_n \geq 0 \quad f(x) = \liminf_n f_n(x)$

$\Rightarrow \int_X f(x) \leq \liminf \int_X f_n$

Def: $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq g_{n+1}(x)$

$f(x) = \lim_n g_n(x) = \sup_n g_n(x)$

PER IL TEO DI CONV. MONOTONA

$$\int f = \lim_n \int g_n(x) = \liminf_n \int g_n \leq \liminf_n \int f_n$$

$$\left[g_n(x) \leq f_n(x) \quad \forall x \quad \forall n \right].$$

OSS:

$$f_n = \chi_{[n, n+1]}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n = n \cdot \chi_{\left(0, \frac{1}{n}\right]}(x)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + x^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \quad \text{MA}$$

$$f = \lim_n f_n = 0$$

TEO DI CONV. DOMINATA (DI LEBESGUE)

$$f_n \in M, \quad g \in M, \quad g \geq 0, \quad \int_X g < +\infty,$$

SUPP ω l'and

$$\textcircled{1} \quad |f_n| \leq g \quad \forall n$$

$$\textcircled{2} \quad \exists f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \text{,,} \quad \|f_n - f\|_{L^1}$$
$$\Rightarrow \lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

OSS: $\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int f = \lim_n \int f_n.$$

DI: $|f_n| \leq g \Rightarrow |f| \leq g \quad \varepsilon \quad |f_n - f| \leq 2g$

$$\int_X 2g = \int_X \lim_n (2g - |f_n - f|) \leq \liminf_n \int 2g - |f_n - f|$$

L. FATOU

$$= \int 2g - \limsup_n \int |f_n - f| \Rightarrow \limsup_n \int |f_n - f| = 0.$$

LEZIONE 12

29/11/2022



REFERENZA:

FOLLAND

REAL ANALYSIS

MIASURE PRODOTTO

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ SPAZI DI MISURA

SI DEFINISCE $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (σ -ALGEBRA PRODOTTO)

LA σ -ALGEBRA SU $X \times Y$ GENERATA DAI

"RETTANGOLI" $E \times F$, CON $E \in \mathcal{A}$ E $F \in \mathcal{B}$,

CI OÈ LA PIÙ PICCOLA σ -ALG. CHE CONTIENE
I RETTANGOLI

DEF: $\mu \times \nu$ È UNA MISURA PRODOTTO DI μ E ν
SE È DEFINITA SU $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ E

$$\mu \times \nu (E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F) \quad \forall E \in \mathcal{A} \text{ e } F \in \mathcal{B}.$$

PROP: $\exists$ UNA MISURA PRODOTTO

COSTRUZIONE: $(\mu \times \nu)^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu(E_i) \nu(F_i) : (E_i, F_i)_i \text{ T.C. } E \subseteq \bigcup E_i \times F_i \right\}$

$$E \subseteq X \times Y$$

① $(\mu \times \nu)^*$ È UNA MISURA ESTERNA

② $\exists$ $\mathcal{M}$ σ -ALG. DEI MISURABILI T.C. $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}}$
È UNA MISURA COMPLETA

$$\odot \quad A \otimes B \subseteq \mathcal{M} \quad \in (\mu \times \nu)^*(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F).$$

OSS: $(\mu \times \nu)^*|_{A \otimes B}$ È LA MISURA PRODOTTO MASSIMALE,

È ANCHE L'UNICA MISURA PRODOTTO SE
 μ E ν SONO σ -FINITE.

ES: $X = ([0,1], \mathcal{L}) \quad Y: ([0,1], \mathcal{P}(Y), \nu)$
 $\nu(F) = \#F \quad F \subseteq Y$

LA MISURA PRODOTTO NON È UNICA

$$X \times Y = [0,1]^2 \quad \mathcal{M}([0,1]) \otimes \mathcal{P}([0,1])$$

OSS: In generale $A \otimes B \subsetneq M$
 $\in (\mu \times \nu)^* / A \otimes B$ NON E' COMPLETA

ESEMPLI: $B(\mathbb{R}^n) \otimes B(\mathbb{R}^m) = B(\mathbb{R}^{n+m})$
 $M(\mathbb{R}^n) \otimes M(\mathbb{R}^m) \subsetneq M(\mathbb{R}^{n+m})$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ NON MISURABILE

$F \subseteq \mathbb{R}^m$ TRASCURABILE

$V \times F \in M(\mathbb{R}^{n+m})$ ma $\notin M(\mathbb{R}^n) \otimes M(\mathbb{R}^m)$
in
 $\mathbb{R}^n \times F$

SECTION 6 RESTRICTION

$$E \subseteq X \times Y$$

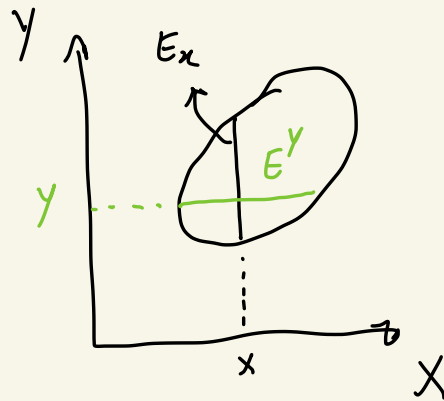
$$\forall x \in X \quad E_x := \{y : (x, y) \in E\} \subseteq Y$$

$$\forall y \in Y \quad E^y := \{x : (x, y) \in E\} \subseteq X$$

$$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \quad f_x(y) := f(x, y) : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall y \quad f^y(x) := f(x, y) : X \rightarrow \mathbb{R}$$



PROP: $\circ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X \\ E_y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y \end{array} \right\} (*)$

$\circ f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{B}, \nu) \quad \forall x \\ f_y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \forall y \end{array} \right\}$

DIN: $\mathcal{E} = \left\{ G \subseteq X \times Y \text{ CHE VERIFICANO } (*) \right\}$

OSSERVIAMO CHE $E \times F \in \mathcal{E} \quad \forall E, F$

SI MOSTRA CHE $\mathcal{E}$ È UNA σ -ALGEBRA (DA VERIF.)

$\Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$.

PER IL SECONDO PUNTO, OSSERVIAMO CHE

$$f_x^{-1}(I) = f^{-1}(I)_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X \text{ e } I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$f_y^{-1}(I) = f^{-1}(I)_y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y \text{ e } " .$$

OSS: SE $(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ È UN COMPLETAMENTO

DI $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

ALLORA VALE LA TESI CON $\overset{\sim}{\forall}$ INVECE DI $\forall$

↑

"PER QUASI OGNI"

OSS: NON VALE IL VICEVERSA (ESERCIZIO)

COME SI ESPRIME $\mu \times \nu(E)$ IN FUNZIONE DI
 $\mu(E^y)$ E $\nu(E^x)$?

PROP: μ, ν σ -FINITE $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow$

- ① $x \rightarrow \nu(E_x)$ È MISURABILE IN $(X, \mathcal{A}, \mu)$
- ② $y \rightarrow \mu(E^y)$ " IN $(Y, \mathcal{B}, \nu)$
- ③ $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$

Def: GLI INSIEMI $E \subseteq X \times Y$ CHE VERIFICANO ① ② ③
SONO UNA σ -ALG. CHE CONTIENE I RETTANGOLI

① 1 RETTANGOLI VERIFICANO

CLASSE
MONOTONA

② PER LINEARITÀ $\cup$ FINITE E $\cap$ FINITE DI RETT. VERIF.

③ LE $\cup$ NUM. CRESCENTI VERIFICANO (BESPO-LEVI)

④ LE $\cap$ NUM. DECRESCENTI VERIFICANO (σ -FINITEZZA)

⑤ UNA CLASSE MONOTONA, CHE CONTIENE $\emptyset$ E $X \times Y$,
È UNA σ -ALGEBRA

ES:

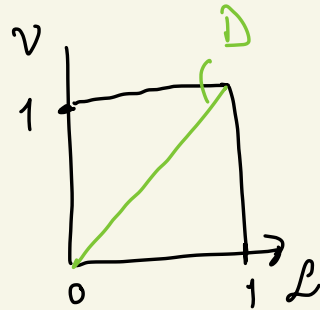
$$X = Y = [0, 1] \quad \mu = \mathcal{L} \quad \nu(E) = \#E$$

$$X \times Y = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \quad D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$$

$$\int_0^1 \nu(E_x) d\mathcal{L} = 1 \quad \int_0^1 \mathcal{L}(E^y) d\nu = 0$$

1

SI HA ANCHE $(\mathcal{L} \times \nu)^*(D) = +\infty$ (VERIFICARE)



TEO (TUBINI - TONELLI)

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ SP. DI MISURA σ -FINITI

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ SP. PRODOTTO (UNICO)

① $f \in \mathcal{M}(X \times Y), f \geq 0 \Rightarrow f_x \text{ e } f^y \text{ SONO MISURABILI}$

(TONELLI) $x \rightarrow \int_Y f_x \text{ e } y \rightarrow \int_X f^y \text{ SONO MISURABILI } \forall (x, y)$

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y \, d\mu \right) d\nu$$

② $f \in L^1(X \times Y) \Rightarrow \text{VALE LA STESSA COSA}$

(FUBINI)

CON $\tilde{A}$ AL POSTO DI A

Din:

①

① $f = \chi_E \Rightarrow$ È LA PROP. PRECEDENTE

DATO CHE $f_x = \chi_{E_x}$ E $f^y = \chi_{E^y}$

① $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ SEMPLICE $\Rightarrow$ LINEARITÀ DI $\int$

① $f \in M \Rightarrow f = \sup_n s_n$ $s_n \geq 0$ SEMPLICE
 $s_{n+1} \geq s_n$

$\Rightarrow \sup_n (s_n)_x = f_x$, $\sup_n (s_n)^y = f^y \Rightarrow$ SI APPLICA
BEppo-LEVI

② $f \in L^1 \Rightarrow f = f^+ - f^-$ LA DECOMPOSIZIONE CONNUTA
CON LE RESTRIZIONI $\Rightarrow$ LINEARITÀ DI $\int$
E IL PUNTO ①

OSS: PER VEDERE SE $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$ STA IN $L^1(X, Y)$

BASTA CONTROLLARE CHE

$$\int_{X \times Y} |f| < +\infty$$

CIOÈ

o

$$\int_X \int_Y |f|_x d\nu d\mu < +\infty$$
$$\int_Y \int_X |f|_y d\mu d\nu < +\infty$$

OSS: IL TEOREMA VALE ANCHE PER

$$f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$$

SPAZIO PRODOTTO COMPLETO

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$$

$$f \in L^1(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$$

CON $\tilde{f}$ AL POSTO DI f .

OSS: In $(\mathbb{R}^n, m, L)$ possiamo iterare n volte il teo

$$\Rightarrow f \in m(\mathbb{R}^n, L), f \geq 0 \quad \circ \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dL = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$

PROP: $f \in m(\mathbb{R}^n, L) \Leftrightarrow S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y < f(x)\} \in m(\mathbb{R}^{n+1})$

se $f \geq 0$ si ha $\int_{\mathbb{R}^n} f = L^{\mathbb{R}^{n+1}}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$

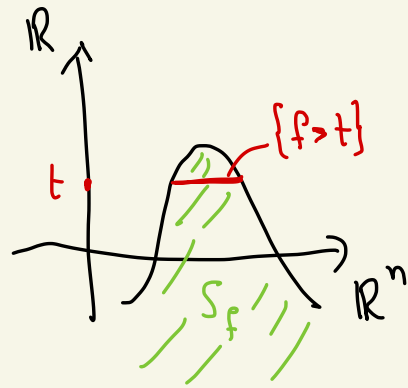
DIN: $f \in m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (S_f \cap \{y=t\}) = \{f > t\} \in m(\mathbb{R}^n) \quad \forall t$

SUPP. S_f MISURABILE $\Rightarrow$

$$S_f \cap \{y=t\} = \{f>t\} \text{ mis. } \forall t$$

$$\{f>t\} = \bigcup_n \{f>t_n\} \quad t_n > t_{n+1} \rightarrow t$$

$$\Rightarrow \{f>t\} \text{ mis. } \forall t \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$



SUPP. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ $f = \sup_n S_n$ $S_n \leq S_{n+1}$ SEMPLICE

$$S_f = \bigcup_n S_{S_n} \text{ MISURABILE } \underline{SE} \quad S_S \text{ MISUR. } \forall S \text{ SEMPLICE.}$$

$$S = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i} \quad E_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad S_S = \bigcup_{i=1}^N E_i \times (-\infty, c_i)$$

E_i DISGIUNTI MISURABILE

INOLTRE, SE $S \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} S = \sum_i c_i \mathcal{L}(E_i) = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$

$\Rightarrow$ CONCLUDO PER BEPPO - LEVI PER $f \geq 0$.

OSS: SI PUO' DEFINIRE, PER $f \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \right) dx$$

ED E' UNA DEF. EQUIV. DELL'INT. DI LEBESGUE,

LEZIONE 13

30/11/2022



ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE
CON SEZIONI MISURABILI (CON IPOTESI DEL CONT.)

ω_0 PRIMO ORDINALE INFINITO (NUMERABILE)

ω_1 PRIMO ORDINALE NON NUMERABILE

$|C|: |\omega_1| = C = 2^{|\omega_0|}$

$\Rightarrow \exists$ bijezione $f: [0,1] \rightarrow \omega_1$

$$E = \{ (x, y) \in [0,1]^2 : f(x) < f(y) \}$$

OSS: $\forall x \in [0,1]$ $f(x)$ è un ordinale numerabile

$E^y = \{ x : f(x) < f(y) \} \Rightarrow E^y \text{ è finito o numerab.} \Rightarrow \text{DI BOREL}$

$E_x = \{ y : (x, y) \in E \} = \{ y : f(x) < f(y) \} \Rightarrow E_x \overset{C}{\in} \text{ FINITO o NUM.}$
 $\Rightarrow E_x \text{ è DI BOREL}$

SE E FOSSE LEB. MISURABILE VARREBBE F.T.

$$\begin{aligned} L(E) &= \int_0^1 L(E_n) dx = 1 \\ &= \int_0^1 L(E^y) dy = 0 \end{aligned} \quad \text{ASSURDO}$$

OPERATORI DI COMPOSIZIONE

$$u \rightarrow T(u) = f(x, u)$$

DEF: (X, A, μ) sp. di misura

$f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE DI CARATHÉODORY SE

- ① $f(x, \cdot)$ è cont. $\forall x \in X$
- ② $f(\cdot, t)$ è mis. $\forall t \in \mathbb{R}$

PROP $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funz. di C.

$$|f(x, t)| \leq h(x) + C|t|$$

$C > 0$ e $h \geq 0$ con $\int_X h < +\infty$
misur.

$\Rightarrow$ ① $\forall u \in M(X)$ $T(u)(x) := f(x, u(x))$ è misurabile
e ② $T: L^1 \rightarrow L^1$ con continuità.

OSS:

$u_n \rightarrow u$ in $L^1(X) \Rightarrow \exists \eta_n$ e $g \geq 0$, $g \in L^1(X)$ t.c.

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{e } |u_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Din. VEDIAMO CHE $f(x, \mu(x))$ È MISURABILE

$$\mu = \sum c_i \chi_{E_i} \text{ SEMPLICE}$$

$$\Rightarrow f(x, \mu) = \sum f(x, c_i) \chi_{E_i}(x) \quad \text{MISUR.}$$

IN GENERALE SIA $\mu_n \rightarrow \mu$ PUNTUALMENTE, μ_n SEMPLICE,

$$\Rightarrow f(x, \mu_n(x)) \rightarrow f(x, \mu(x)) \quad \forall x \Rightarrow f(x, \mu) \text{ È MISURABILE}$$

VEDIAMO CHE $\mu \in L^1 \Leftrightarrow T(\mu) \in L^1$

$$\|T(\mu)\|_{L^1} = \int_X |f(x, \mu)| \leq \int_X h + C \int |\mu| < +\infty$$

INFINITO, SIA $\mu_n \rightarrow \mu$ in $L^1(X)$

$$\exists \eta_k \text{ T.C. } u_{n_k} \rightarrow u \quad \tilde{V}x \in |u_{n_k}| \leq g \quad \tilde{V}x \quad \text{con } \int g < +\infty$$

$$\Rightarrow f(x, u_{n_k}(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \quad \tilde{V}x$$

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq h(x) + Cg(x)$$

$$\text{PER IL TEO DI LEB.} \quad \int_X |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))| \xrightarrow[k]{} 0$$

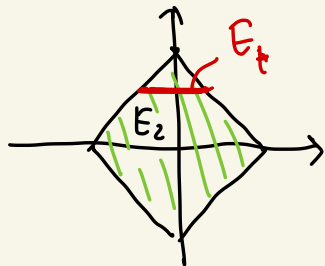
$$\|T(u_{n_k}) - T(u)\|_{L^1(X)}$$

$$\Rightarrow T(u_n) \rightarrow T(u) \text{ IN } L^1(X).$$

ESERCIZIO

$$\|x\|_1$$

$$\textcircled{1} \quad E_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$$



CALCOLARE $|E_n|$

PER F.T. $|E_n| = \int_{-1}^1 |E_t| dt$

$$E_t = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in E_n \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leq 1 - |t| \right\} = (1 - |t|) E_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\Rightarrow |E_t| = |E_{n-1}| (1-|t|)^{n-1}$$

$$\Rightarrow |E_n| = |E_{n-1}| \int_{-1}^1 (1-|t|)^{n-1} dt = 2 |E_{n-1}| \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt$$

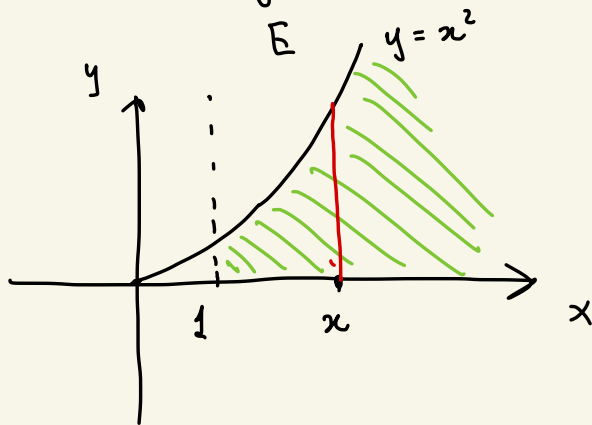
$$= 2 |E_{n-1}| \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{2}{n} |E_{n-1}| = \frac{2^2}{n(n-1)} |E_{n-2}|$$

$$\dots = \frac{2^k}{n \cdot (n-k+1)} |E_{n-k}|$$

$$= \frac{2^{n-1}}{n!} |E_1| = \frac{2^n}{n!} \xrightarrow{n} 0$$

② $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

CALCOLARE $\int_E f(x, y) dx dy$ con $f(x, y) = \frac{1}{x(x^2 + y^2)}$



$$\int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_E$$

$$\int_E f = \int_1^\infty \left(\int_{E_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_1^\infty \int_0^{x^2} \frac{1}{x(x^2 + y^2)} dy dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int_E f = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \arctan(x) dx$$

$$= -\frac{1}{x} \arctan(x) \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_M \left(\log \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \right) + \log \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + \log \sqrt{2}$$

$$\left[\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a + (a+b)x^2 + cx}{x(1+x^2)} \right. \quad \left. \begin{array}{l} a=1 \\ c=0 \\ b=-1 \end{array} \right]$$

ANALISI 2

6/12/2022



TEOREMA DEL CAMBIO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

DONANDA: $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\phi \in C^1(\Omega)$
 $E \subseteq \Omega$ MISURABILE PER LEB.

① $\phi(E)$ È MIS?

② POSSO STIMARE $|\phi(E)|$

CASO LINEARE:

$$\phi(x) = L \cdot x \quad L \in \Pi(n)$$

$$\textcircled{1} \quad \det L = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(L)) < n$$

$$\operatorname{Im}(L) \subsetneq \mathbb{R}^n \Rightarrow |\operatorname{Im}(L)| = 0$$

$$\begin{array}{c} \phi(\bar{e}) \in \operatorname{Im}(L) \quad \forall \bar{e} \Rightarrow |\phi(\bar{e})| = 0 \quad \forall \bar{e} \\ \parallel \\ L \cdot \bar{e} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \det L \neq 0$$

$$L \text{ K cpt } \forall K \text{ cpt}$$

$$L \Delta \text{ aperte } \forall \Delta \text{ aperte}$$

$$LE \text{ è MISURABILE} \quad \& \quad |LE| \text{ è una}$$

MISURA INV. PER TRASLATIONI

$$|LE| = c(L) |E|$$

$$c(L) = |L[0,1]^n|$$

LÖHNER: $c(L) = |\det L|$

$$\textcircled{1} \quad c(L \cdot T) = c(L) \cdot c(T)$$

$$|\det(L \cdot T)| = |\det L| \cdot |\det T|$$

$$\odot \quad L \in O(n) \quad L^T B = B \quad c(L) = 1$$

$$\odot \quad L \text{ DIAG.} \quad |L([0,1]^n)| = \prod |\lambda_i| = |\det L|$$

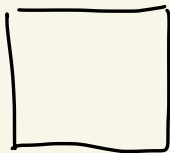
$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\odot \quad L \in H(n) \quad L = A D B \quad D \text{ DIAG.} \\ A, B \in O(n)$$

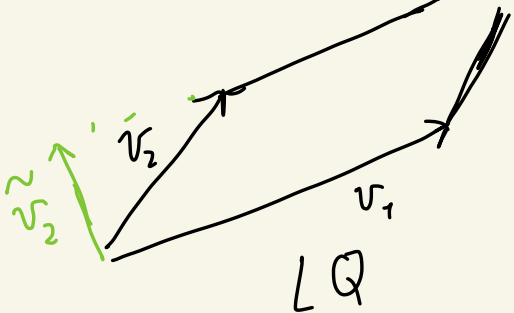
$$c(L) = c(D) = |\det(D)| = |\det(L)|$$



②



$$Q = [0, 1]^2$$



$$L = (v_1 | v_2)$$

$$\tilde{L} = (v_1 | \tilde{v}_2)$$

$$|LQ| = |v_1| \cdot \overbrace{\left| v_2 - \langle v_2, \frac{v_1}{|v_1|} \rangle \frac{v_1}{|v_1|} \right|}^{\tilde{v}_2} = |\det \tilde{L}| \stackrel{\uparrow}{=} |\det L|$$

TEO (CAMBIO DI VARIABILE)

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\phi \in C^1$, ϕ INIETTIVA

$$\textcircled{1} \quad E \subseteq \Omega \text{ mis.} \Rightarrow \phi(E) \text{ mis.} \quad |\phi(E)| = \int_E |\mathcal{J}_\phi(x)| dx$$
$$\mathcal{J}_\phi = \det(D\phi)$$

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mis.} \quad \text{con } f \geq 0 \quad \text{e } f \in L^1(\Omega)$$

$$\int_{\phi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(x) |\mathcal{J}_\phi(x)| dx$$

$$[y = \phi(x) \quad \text{CAMBIO DI VAR.}]$$

$$[f = \chi_{\phi(E)}, \quad f \circ \phi = \chi_E]$$

Lemma $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 con $\|\nabla \phi\| \leq C$

$E \subset \Omega$ n.s. $\Rightarrow \phi(E)$ n.s. E

$$|\phi(E)| \leq \int_E |\nabla \phi(x)| dx$$

Def

$\phi(B_r(x_0)) \subseteq B_{Cr}(\phi(x_0)) \quad \forall r \in \forall x_0$

$|N| = 0 \Rightarrow |\phi(N)| = 0$

K cpt $\Rightarrow \phi(K)$ cpt

$K \in \mathcal{F}_\sigma$ clob $K = \bigcup_i K_i$ K_i cpt $\Rightarrow \phi(K) \in \mathcal{F}_\sigma$

$\sigma \nearrow \textcircled{1} \phi(B) \text{ BOREL} \quad \forall B \text{ BOREL} \quad (\vee \Delta \text{ NO STRATO})$

$\sigma \searrow \textcircled{2} E \text{ n.i.s.} \Rightarrow E = F \cup N$

$F \in \mathcal{F}_\sigma \text{ e } |N| = 0$
 $(\vee \Delta \text{ NO STRATO})$

$$\phi(E) = \phi(F) \cup \phi(N) \text{ n.i.s.}$$

CLAIM:

$\forall K \text{ cpt} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_0 \text{ T.C.}$

$$\phi(Q_r(x_0)) \subseteq F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))$$

$\forall r \in (0, r_0)$
 $\forall x_0 \in K$

DOVE

$$Q_r(x_0) = \prod_i \left[(x_0)_i - \frac{r}{2}, (x_0)_i + \frac{r}{2} \right]$$

$$\varepsilon \quad F_{x_0}(x) = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x-x_0)$$

sin

$i \in \{1, \dots, n\}$

$x \in Q_r(x_0)$

$$|\phi_i^{(n)}(F_{x_0})_i^{(n)}| = |\phi_i(x) - \phi_i(x_0) - D\phi_i(x_0)(x-x_0)|$$

$$= |(\underbrace{D\phi_i(x)}_{\text{Lipschitz}}) - D\phi_i(x_0) \cdot (x-x_0)|$$

$$\leq r \cdot \omega(r)$$

"

$$\sigma(r)$$

ω modulo di CONT. di

$D\phi$

$$\left[\omega(r) = \max_{\|x-y\| \leq r} |f(x) - f(y)| \quad \text{modulo di CONT.} \right]$$

SCELGO r_0 T.C. $\omega(r_0) < \varepsilon$.

PRENDENDO LE MISURE

$$|\phi(Q_r(x_0))| \leq |F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))| = |\mathcal{I}_\phi(x_0)| (1+\varepsilon)^n r^n$$

$$= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |\mathcal{I}_\phi(x)| dx$$

$$= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |\mathcal{I}_\phi(x)| + \underbrace{(|\mathcal{I}_\phi(x_0)| - |\mathcal{I}_\phi(x)|)}_{\leq \varepsilon \text{ PER } r_0 \text{ PICCOLO}} dx$$

$$\leq (1+\varepsilon)^n \int |\mathcal{I}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n r^n$$

$\forall r < r_0$
 $\forall x \in K$

$$E = \bigcup_i Q_i$$

$$|Q_i \cap Q_j| = 0 \quad i \neq j$$

$$Q_i = Q_{r_i}(x_i) \quad r_i < r_0 \quad x_i \in K$$

$$|\phi(E)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_E |\mathcal{I}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n |E|$$

A APERTO

$$A = \bigcup E_n \quad E_n \subseteq E_{n+1}$$

E_n UNIONE NON DI CUBI

$$|\phi(A)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_A |\mathcal{I}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n |A|$$

E MISURABILE, $|E| < \infty$

$$A \supset E \quad \text{APERTO} \quad |A| \leq |E| + \varepsilon \quad \|J_\phi\|_\infty$$

$$|\phi(E)| \leq |\phi(A)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_E |J_\phi(x)| + \overset{\uparrow}{C} \varepsilon (1+\varepsilon)^n + (|E| + \varepsilon) (1+\varepsilon)^n$$

$$n \Delta \Delta 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

COR: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ n.s. $f \geq 0$

$$\int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_{\Omega} (f \circ \phi) |J_\phi|$$

Dim: $f = \chi_{\phi(E)}$ OR f SEMPLICE PER LINEARITÀ
 f GENERALE PER APPROSS. CON FUNZIONI SEMPLICI

COR: $Z = \{x: J_\phi(x) = 0\}$

$$\Rightarrow |\phi(z)| \leq \int_Z |J_\phi(x)| = 0$$

(LEMA DI SARD)

DIN. TEO

SUPP. $\phi^{-1} \in C^1$ (vero se $J_\phi(x) \neq 0$
 $\forall x \in \Omega$)

$$|J_\phi(x) \cdot J_{\phi^{-1}}(\phi(x))| = |\det(D\phi(x) \cdot D\phi^{-1}(\phi(x)))| = 1$$

$$\int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_{\Omega} (f \circ \phi) |J_\phi| \leq \int_{\phi(\Omega)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) |J_\phi| \cdot |J_{\phi^{-1}}| = \int_{\phi(\Omega)} f$$

$\uparrow$
 ϕ^{-1}

IL CASO L^1 SI FA PER LINEARITÀ

GENERALIZATION (no dim.)

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 NON NECESS. INJECTIVE

$$\int_{\phi(\Omega)} f(y) \cdot N(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(x) |\mathcal{J}_{\phi}(x)| dx$$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ n.s. $f \geq 0$ σ $f \in L^1$

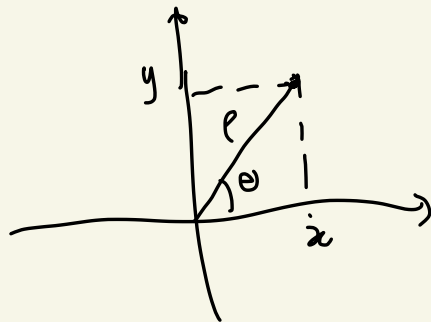
$$N(y) = \# \{ \phi^{-1}(y) \}$$

ESSENPI:

① COORD. POLAR

$$\phi: \underbrace{[0, +\infty)}_r \times \underbrace{[0, 2\pi)}_\theta$$

$$\phi = (x, y)$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$J_\phi = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d\theta \, dr$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} 2\rho \, d\rho = \pi$$

|| F.T.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Analisi 2

7/12/2022



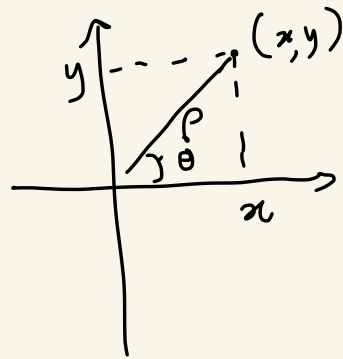
ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

COORD. POLARI

$$\phi(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$J_{\phi} = \rho \neq 0$$



COORD. CILINDRICHE

$$\phi(\rho, \theta, z) : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

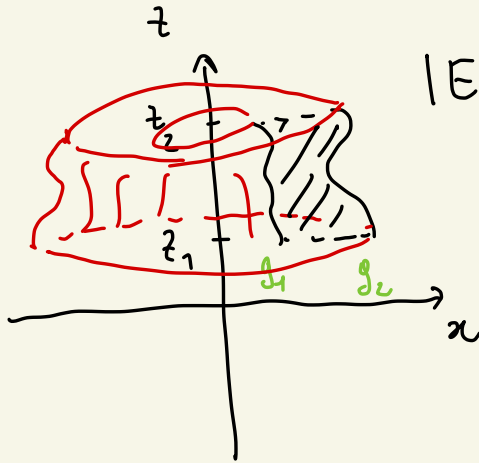
$$J_{\phi} = \rho$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

$$E = \left\{ z_1 \leq z \leq z_2, \rho_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho_2(z) \right\}$$

$$\phi^{-1}(E) = \left\{ z_1 \leq z \leq z_2, \rho_1(z) \leq \rho \leq \rho_2(z) \right\}$$

$$|E^z| = \pi \left(\rho_2(z)^2 - \rho_1(z)^2 \right)$$



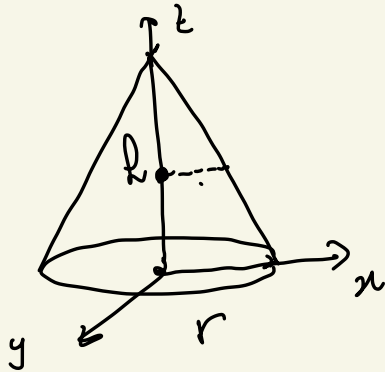
$$|E| = \int_{\phi^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$= \pi \int_{z_1}^{z_2} \left[\rho_2(z)^2 - \rho_1(z)^2 \right] dz$$

BARICENTRO DI $E \subseteq \mathbb{R}^n$ MIS.

$$B_E = \frac{1}{|E|} \int_E x \, dx \in \mathbb{R}^n$$

ES. CALCOLARE IL BARICENTRO DI
UN CONO DI ALTEZZA h E RAGGIO r



$$E = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right\}$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\pi r^2 L}{3}$$

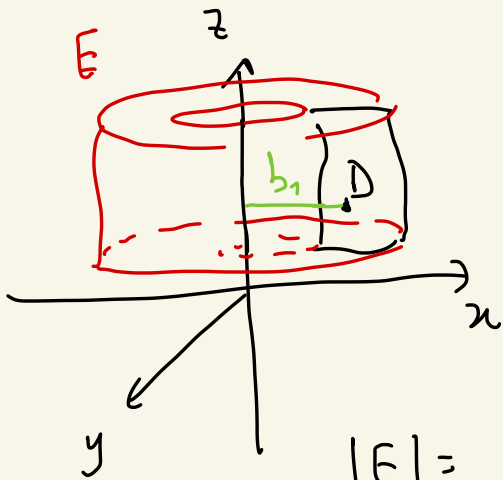
$$B_z = \frac{1}{|\mathbf{E}|} \int_{\mathbf{E}} z \, dx \, dy \, dz = \frac{3 \cdot 2\pi}{\pi r^2 L} \int_0^L z \int_0^r r \left(1 - \frac{z}{L}\right) dr \, dz$$

↑
coord. cyl.

$$= \frac{6}{r^2 L} \int_0^L \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 dz = 3L \int_0^L \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \frac{dz}{L}$$

$t = \frac{z}{L}$

$$= 3L \int_0^1 t(1 - 2t + t^2) dt = 3L \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{L}{4}$$



$$D = \{(x, z): z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\}$$

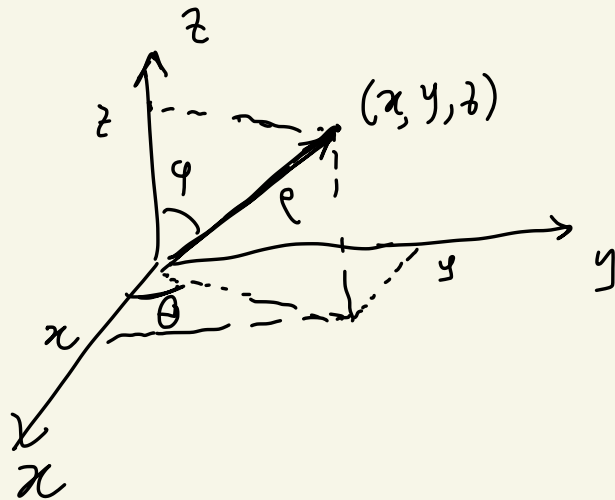
$$E = \{(x, y, z): \quad \quad \quad, g_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g_2(z)\}$$

$$|E| = 2\pi \int_{\underbrace{z_1 \quad g_1(z)}_{\int_D x}}^{z_2 \quad g_2(z)} x \, dx \, dz = \underbrace{2\pi b_1}_{\text{TEOREMA DI GULDINO}} |D|$$

$$B_D = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = \frac{1}{|D|} \int_D x \, dx; \quad b_2 = \frac{1}{|D|} \int_D z \, dz$$

COORD POLAR IN $\mathbb{R}^3$



$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$$

$$\rho \in [0, +\infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$J_\phi = \cos \varphi \left(-\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) - \rho^2 \sin \varphi \sin^2 \varphi = -\overset{?}{\rho^2 \sin \varphi}$$

$$|J_\phi| = \rho^2 \sin \varphi \geq 0$$

$$B_R = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R\}$$

$$|B_R| = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi = 2\pi \overset{R^3}{\left(\int_0^R \rho^2 \right)} \overset{2}{\left(\int_0^\pi \sin \varphi \right)}$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad a, b, c > 0$$

$$|E| = ?$$

$$X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b} \quad Z = \frac{z}{c}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$(X, Y, Z) = L \cdot (x, y, z)$$

$$\det L = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$$

$$LE = B_1 \quad |LE| = (\det L) |E| = |B_1| = \frac{4}{3} \pi$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{4}{3} \pi a \cdot b \cdot c$$

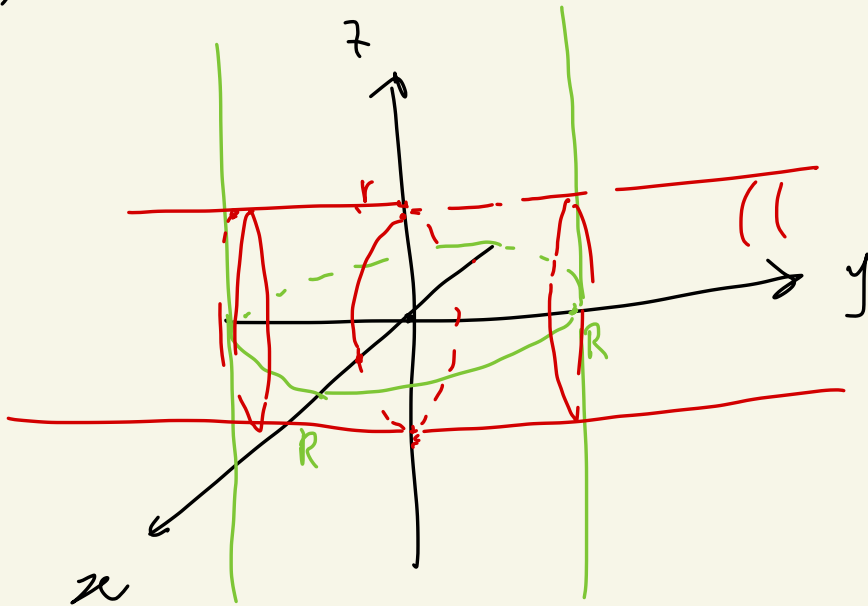
ES:

$$C_R^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

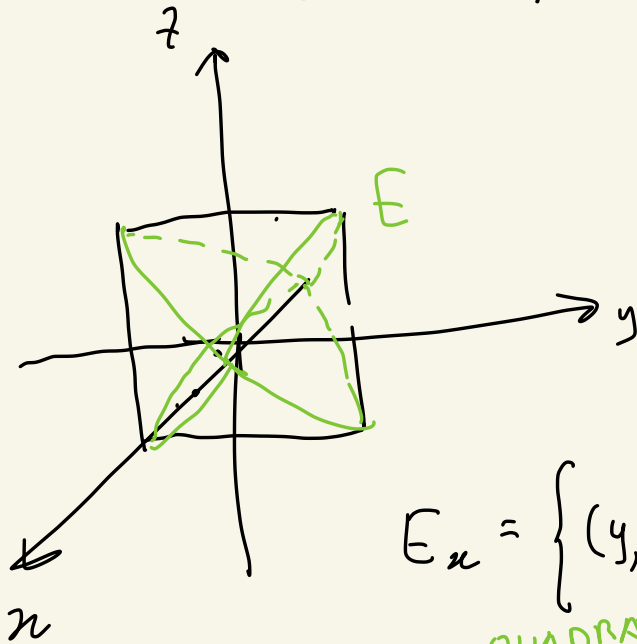
$$C_r^2 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$$E = C_R^1 \cap C_r^2$$
$$r \leq R$$

$$|E| = ?$$



$$r = R \quad (r < R \text{ per caso})$$



$$E_x = \left\{ (y, z) : |y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}, |z| \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

QUADRATO DI LATO $2\sqrt{R^2 - x^2}$

$$|E| = \int_{-R}^R |E_x| dx = 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 8 \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{16}{3} R^3$$

13/12/2022

ANALISI 2



CURVE IN $\mathbb{R}^n$

DEF: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUA SI DICE "CURVA"

- γ È CHIUSA SE $\gamma(a) = \gamma(b)$
- $\text{Im}(\gamma)$ SI DICE SUPPORTO DELLA CURVA
- γ È REGOLARE SE $\gamma \in C^1$ E $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- γ È REGOLARE A TRATTI SE γ È CONTINUA
ED $\exists t_1 < \dots < t_n \in [a, b], \quad t_1 = a, t_n = b,$
T.C. $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ È REGOLARE

OSS: γ REGOLARE $\Rightarrow \gamma$ È LOCALMENTE GRAFICO DI
UNA FUNZ. C^1 , CIOÈ (1 NENO DI ROTAZIONI
E TRASLAZIONI) $\forall \bar{t} \exists \varepsilon$ t.c.

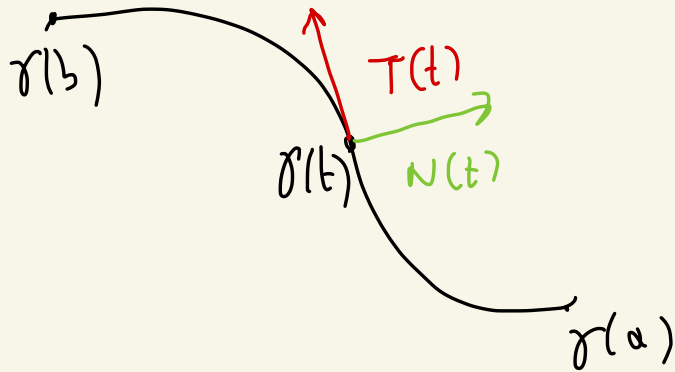
$$\gamma(t) = (t, u(t)) \quad t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon)$$

$$u: (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{DI CLASSE } C^1$$

[VERIFICARLO PER ESERCIZIO]

IL VETTORE $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in S^{n-1}$

SI DICE VETTORE TANGENTE A γ IN t



$r(t) = \{ \gamma(t) + \lambda \gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R} \} \in$ LA RETTA TANGENTE

⊙ SE $n=2$, $N(t) = R \cdot T(t)$ È IL VETTORE NORMALE

DOVE SI SCEGLIE $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ROTAZIONE DI $\frac{\pi}{2}$

IN SENSO ORARIO

PROIEZIONE LUNGO $T(t)$

⊙ IL VETTORE $\vec{K}(t) = \frac{T(t)'}{|T'(t)|} = \frac{\gamma''(t) - \langle \gamma', T(t) \rangle T(t)}{|T'(t)|^2}$

È IL VETTORE CURVATURA

$$0 = \partial_t \langle T(t), T(t) \rangle = 2 \langle T'(t), T(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{K}(t), T(t) \rangle = 0$$

SE $n=2$, $\vec{K}(t) = \overset{\uparrow}{K(t)} \cdot N(t)$
CURVATURA (SCALARE) DI γ

SE $n > 2$, $\vec{K}(t) \in T(t)^\perp \leftarrow$ SP. di dim. $n-1$

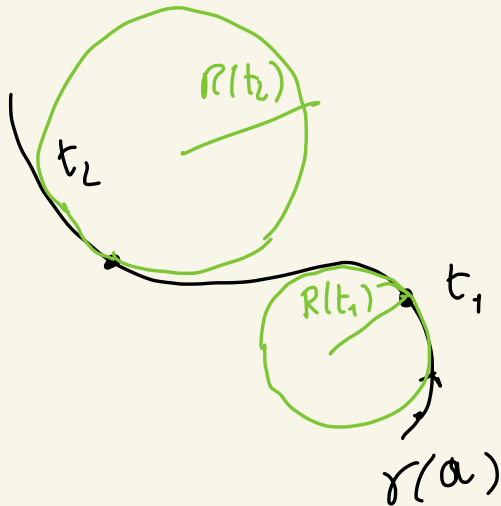
POSSO SCRIVERE $\vec{K}(t) = K(t) N(t)$

con $N(t) = \frac{\vec{K}(t)}{|K(t)|} \in S^{n-1}$ E $K(t) > 0$
 $\uparrow$
CURVATURA SCALARE

DEF: γ SI DICE BIREGOLARE SE E' REGOLARE
E SE $\vec{K}(t) \neq 0 \forall t$

OSS: $\frac{R(t)}{|K(t)|}$ È IL RAGGIO DEL CERCHIO OSCULATORE

CIÒ È L'UNICO CERCHIO CHE APPROSSIMA
NELLO γ VICINO A $\gamma(t)$.



LA CURVATURA SCALARE
DI UN CERCHIO È $k = \frac{1}{R}$

RIPARAMETRIZZAZIONE

γ_1, γ_2 CURVE

$$\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ SE $\exists \psi: I_1 \rightarrow I_2$ CONTINUA E BIGETTIVA
(NONOTONA)

$$\text{T.C. } \gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$$

QUESTO DEFINISCE UNA RELAZIONE DI EQUIV.

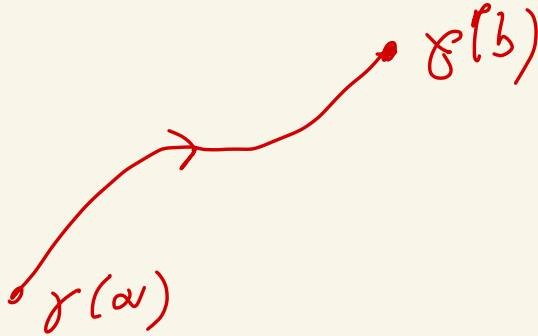
SULLE CURVE, SI HA $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Im}(\gamma_2)$

ψ SI DICE RIPARAMETRIZZAZIONE

OSS: SE ψ È CRESCENTE ALLORA

γ_1 E γ_2 HANNO LO STESSO VERSO,

ALTRIMENTI HANNO VERSO OPPOSTO



OSS: $T(t)$ E $\vec{R}(t)$ NON DIPENDONO DALLA CLASSE DI

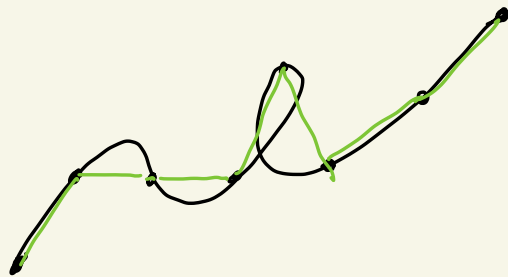
$$\text{EG. : } T_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|} = \frac{\gamma_2'(\psi(t)) \psi'(t)}{|\gamma_2'(\psi)| \cdot |\psi'(t)|} = \pm T_2(\psi(t))$$

$$\vec{K}_1(t) = \vec{K}_2(\psi(t))$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CURVA

$P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ PARTIZIONE



$$L(\gamma) = \sup_P \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \in [0, +\infty]$$

LUNGHEZZA
DI γ

SE $L(\gamma) < +\infty$ LA CURVA SI DICE RETTIFICABILE

OSS: $L(\gamma)$ NON DIPENDE DALLA CLASSE DI E.Q.,
CIOÈ DALLA PARAMETRIZZ. DI γ

TEOREMA: γ CURVA $C^1 \Rightarrow \gamma$ RETTIFICABILE

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

D/11:

P PARTIZIONE

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt$$

SOMMANDO IN i

$$\sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$$\Rightarrow L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

IN PART. γ È RETTIFICABILE.

$\gamma'(t)$ UNIF. CONT., $\forall \epsilon \exists \delta$ T.C.

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |t - s| < \delta.$$

SCELGO $\mathcal{P}$ T.C. $(t_i - t_{i-1}) < \delta \quad \forall i$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) - \gamma'(s)] dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1})$$

$\swarrow$
SCELGO $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \epsilon$

PASSANDO AI MODULI

$$|\gamma'(s)|(t_i - t_{i-1}) = \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s)) dt \right|$$
$$\leq |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \epsilon (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow |f'(s)| \leq \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon$$

INTEGRO IN $SE [t_{i-1}, t_i]$

$$\Rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(s)| ds \leq |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \varepsilon (t_i - t_{i-1})$$

$$\text{SOMMA IN } i \Rightarrow \int_a^b |f'(s)| ds \leq \sum_i |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \varepsilon (b-a)$$

$$\leq L(f) + \varepsilon (b-a)$$

CONCLUDO PER L'ARBITRARIETA' DI $\varepsilon > 0$.

oss: $L(\gamma)$ non è LA "LUNGHEZZA DEL SUPPORTO"
ALMENO SE γ NON È INIETTIVA

oss: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a < c < b$
 $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]} \quad \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]} \quad \left(\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \right)$

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

ES: se $\gamma(t) = (t, u(t)) \quad u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

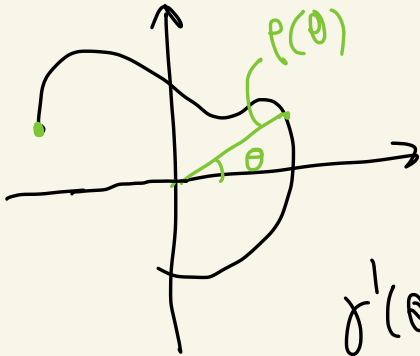
$$\gamma'(t) = (1, u'(t)) \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + u'(t)^2}$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt$$

ES:

$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$r: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, +\infty)$$



$$\gamma'(\theta) = (-r \sin \theta + r' \cos \theta, r \cos \theta + r' \sin \theta)$$

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{r^2 + r'^2} \Rightarrow L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

ES:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

γ CONTINUA, NON REGOLARE VICINO A $t=0$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma|_{[\varepsilon, 1]}$$

$$L(\gamma_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 |\gamma'(t)| dt$$

$$L(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\gamma_\varepsilon) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right]^2} dt$$

$$\left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)' = \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\sqrt{1 + \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)'}^2 = \sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \underbrace{\frac{1}{t^2} \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)}_{O\left(\frac{1}{t^2}\right)} - \frac{1}{t} \sin\left(\frac{2}{t}\right) + 1}$$

$$\text{VERO SE } \left| \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Cioè}$$

$$\frac{1}{t} \in \bigcup_{k \geq 1} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$\Rightarrow t \in \tilde{I} = \bigcup_{k \geq 1} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + k\pi} \right]$$

$$\sqrt{1 + \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2} \geq \frac{c}{t} \quad t \in \tilde{I}$$

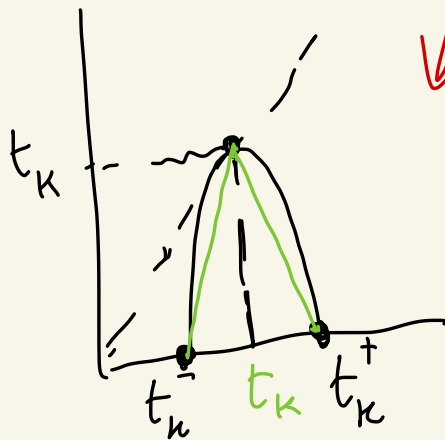
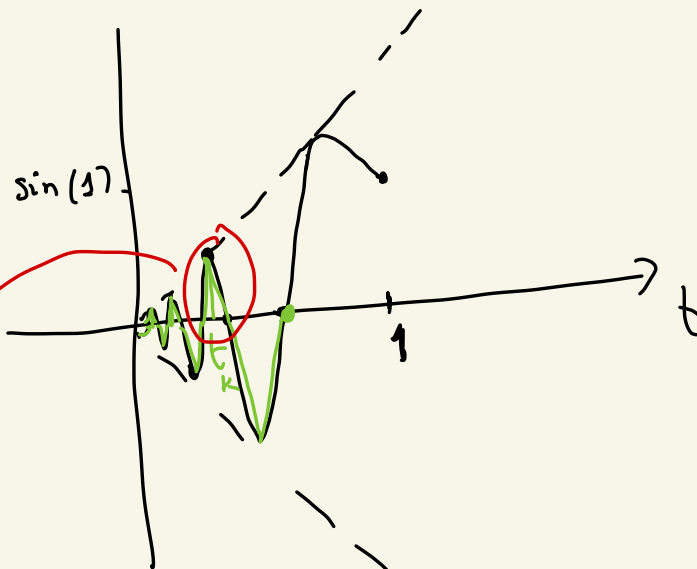
$$L(\gamma) \geq c \int_{\tilde{I}} \frac{1}{t} = c \sum_k \left[\log\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) - \log\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) \right]$$

$$= c \sum_k \log\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) = c \sum_k \log\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= c \sum_k O\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$$

$O\left(\frac{1}{k}\right)$

ALTRO nodo:



$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$\approx O\left(\frac{1}{k}\right)$

$$t_k^- = \frac{1}{(k+1)\pi}$$

$\approx O\left(\frac{1}{k}\right)$

$$t_k^+ = \frac{1}{k\pi}$$

$\approx O\left(\frac{1}{k}\right)$

$$L(\gamma) \geq \sum_{k \geq 1} \sqrt{\underbrace{(t_k^+ - t_k^-)^2}_{O(\frac{1}{k})} + t_k^2} + \sqrt{\underbrace{(t_k - t_k^-)^2}_{O(\frac{1}{k})} + t_k^2} = +\infty$$

ES: $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$

CARDIOID

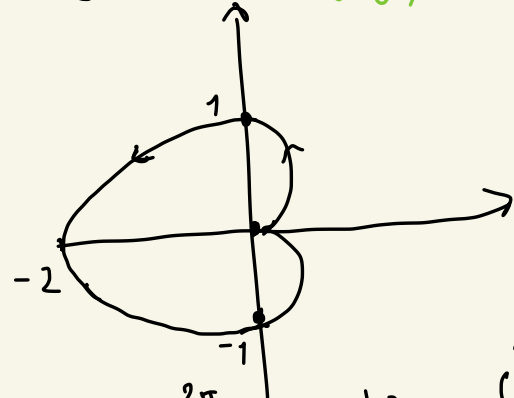
$$\gamma(\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \theta - 2\cos \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4 \int_0^{\pi} \sin(y) = 8$$

$y = \frac{\theta}{2}$

$\theta \in [0, 2\pi]$ $\cos \theta = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$



1/3/2023



INTEGRAZIONE LUNGO UNA CURVA

$\gamma: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ REG. A TRATTI
 A APERTO

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

INVARIANTE PER RIPARMETRIZZAZIONE

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f \quad \text{se} \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t)) \quad \sigma: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

MONOTONA
 C^1 A TRATTI

$v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUO

$v = (v_1, \dots, v_n)$ CAMPO DI VETTORI

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} v \cdot T = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

LAVORO DI v LUNGO γ

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONI CRESCENTI

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ σ MONOTONA, C^1 A TRATTI

$$\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_{\gamma} v \quad \text{SE } \sigma \text{ CRESCENTE}; \quad \int_{\tilde{\gamma}} v = - \int_{\gamma} v \quad \text{SE } \sigma \text{ DECRESCENTE}$$

1 - FORME DIFFERENZIALI

DEF: $L \in (\mathbb{R}^n)^*$ SI DICE COVETTORE

$$(\mathbb{R}^n)^* = \left\{ L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ LINEARE E CONTINUA} \right\}$$

$$\exists ! v \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } L(x) = \langle v, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$$

OSS: IN GENERALE $X^* \simeq X$ SE X HILBERT

MA NON PER I BANACH

DEF: $\{x_i\} \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\{x_i(x) = \langle e_i, x \rangle = x_i\}$ BASE DI $(\mathbb{R}^n)^*$

DEF.

$\omega: \Lambda \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si dice 1-FORMA DIFF. SU Λ

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \quad a = (a_1, \dots, a_n)$$

$$\omega(x)[v] = \langle a, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ω CONT. $\in \gamma$ REG. $\wedge$ TRATTI

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} a = \int_a^b a(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

ES: $\omega(x, y) = -y dx + x dy$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)}_{=1} dt = 2\pi \quad a(x, y) = (-y, x)$$

ES: $f \in C^1(A)$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{DIFFERENZIALE DI } f$$

1-FORMA

IL CAMPO DI VETTORI ASSOCIATO È $\nabla f(x)$

DEF: ω 1-FORMA CONTINUA

SI DICE ESATTA

E IL CAMPO ASSOCIATO SI DICE CONSERVATIVO

SE $\exists f \in C^1(A)$ T.C. $\omega = df$

ES: $\omega = x dx + y dy$ È ESATTA $\left(f = \frac{x^2 + y^2}{2} \right); \omega = -y dx + x dy$
NON È ESATTA

INFATTI, SE $\exists f$ T.C. $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow$

① DERIVANDO AVREI $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y} = -1$ CONTRADDIZIONE

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} = +1$ SCHWARTZ

② INTEGRANDO AVREI

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int -y dx = -xy + C_1(y)$$

$$= \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int x dy = xy + C_2(x) \quad \text{ASSURDO}$$

DEF: ω È ESATTA $\Rightarrow$ SI DICE PRIMITIVA DI ω
O POTENZIALE DEL CAMPO ASSOCIATO

DEF: $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ DI CLASSE C^1 SI DICE CHIUSA

$$\text{se } \boxed{\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j}$$

OSS: ω ESATTA e $C^1 \Rightarrow \omega$ CHIUSA
($f \in C^2$)

OSS: ω ESATTA $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$
DIPENDE DA γ SOLO
ATTRAVERSO GLI ESTREMI $\gamma(a), \gamma(b)$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \nabla f(\gamma) \cdot \gamma' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

IN PART. $\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \forall \gamma$ CURVA REGOLARE CHIUSA

OSS: $\exists \omega$ CHIUSA MA NON ESATTA

$$\omega: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$$

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \omega \notin \text{CHIUSA}$

TEOREMA: $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ 1-FORMA CONTINUA

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIV..

① ω ESATTA

② $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) \in \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$

③ γ CHIUSA $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$

DIN. ① $\Rightarrow$ ② e ① $\Rightarrow$ ③

③ $\Rightarrow$ ②: γ_1, γ_2 $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) \in \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

$$c \in (a, b)$$

$$\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2): [a, 2b-a] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

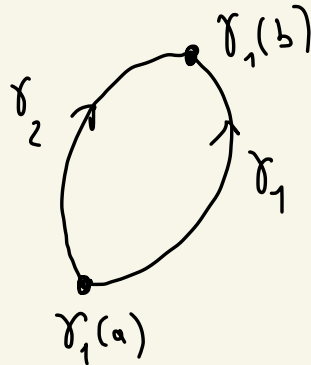
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(2b-t) & t \in [b, 2b-a] \end{cases}$$

CHIUSA

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

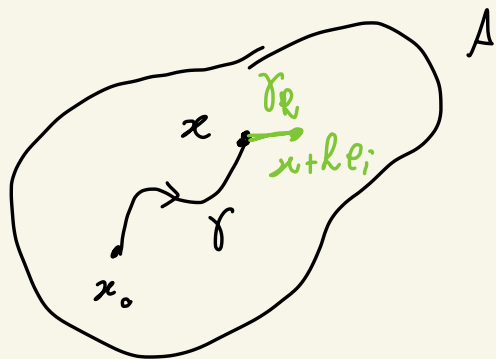
$$(2) \Rightarrow (3)$$

γ CHIUSA SI SCRIVE CONE $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$
 γ_1 E γ_2 CON GLI STESSI ESTREMI



② $\Rightarrow$ ①

CERCHIANO UNA PRIMITIVA DI ω



SCEGLIANO $x_0 \in A$, SIA $\tilde{A} \subseteq A$ LA
COMP. CONNESSA DI x_0 ,
E DEFINIANO

$$f(x) = \int_{\gamma_{x,x}} \omega \quad \text{DOVE } \gamma_{x,x} \text{ È UNA} \\ \text{GENERICA CURVA} \\ \text{CON ESTREMI } x_0 \text{ E } x$$

DEVO VERIFICARE CHE

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x) \quad \forall i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma_{xx}^h} \omega - \int_{\gamma_{xx}} \omega \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega \quad \text{dove } \gamma_h(t) = x + t e_i \quad t \in [0, h]$$

$$\gamma_h'(t) = e_i$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h a_i(x + t e_i) dt = a_i(x)$$

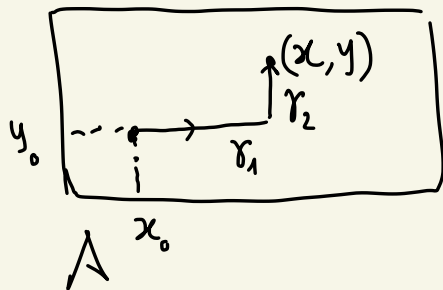
Ass: IN $\tilde{A}$ c.c. di x_0 HO COSTRUITO f CHE DIP. DA x_0 .
DUE PRIMITIVE DI ω IN $\tilde{A}$ DIFFERISCOPO PER UNA
COSTANTE

PROP: Δ RETTANGOLO (ANCHE ILLIMITATO)

ω 1-FORMA C^1 CHIUSA

$\Rightarrow \omega$ È ESATTA

DIN



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

FISSIANO $n=2$
(IN GENERALE SI FA IN NODO SINGOLE)
E FISSIANO $(x_0, y_0) \in A$

$$\gamma_1(t) = (t, y_0) \quad t \in [x_0, x]$$

$$\gamma_2(t) = (x, t) \quad t \in [y_0, y]$$

$$\omega(x, y) = a dx + b dy$$

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \omega = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, t) dt$$

VA VERIFICATO CHE $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt$$

$$= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt = \cancel{a(x, y_0)} + a(x, y) - \cancel{a(x, y_0)}$$

ALLO STESSO MODO $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

2/3/2023



FORME CHIUSE E ESATTE

1-FORME DIFF.

ESATTA

PRIMITIVA

CHIUSA

CAMPI DI VETTORI

CONSERVATIVO

POTENZIALE

IRROTAZIONALE

DEF:

$$\omega = \sum a_i dx_i \in C^1$$

CHIUSA SE

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

SI POSSONO CARATTERIZZARE GLI APERTI

$\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ T.C. ω CHIUSA $\Rightarrow \omega$ ESATTA

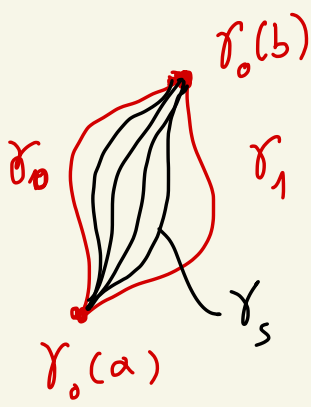
DEF: $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ CURVE

CON $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \in \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

SONO OMOTOPE A ESTREMI FISSATI IN Δ

SE $\exists H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Delta$ CONTINUA

T.C. $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, $H(a, s) = \gamma_1(a) \forall s$
 $\forall t$ $\forall t$ $H(b, s) = \gamma_1(b) \forall s$



$$\gamma_s(t) = H(t, s) \quad t \in [a, b]$$

OSS: POSSO SUPPORRE CHE H ABBA LA STESSA REGOLARITÀ
DI γ_0 E γ_1

SE γ_0 È OMOLOGA A γ_1 IN D

SCRIVIAMO $\gamma_0 \sim \gamma_1$

PROP. $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \rightarrow A$ CON GLI STESSI ESTREMI

ω FORMA CHIUSA IN A

$$\text{SE } \gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

DIM. MOSTRIAMO CHE $f(s) = \int_{\gamma_s} \omega$, DOVE $\gamma_s(t) = H(t, s)$

È COSTANTE IN s .

$$f'(s) = \partial_s \int_{\gamma_s} \omega = \partial_s \int_{H(t,s)} \omega \, dt$$

→ FACCIAMO LO DIN. IN $n=2$ E $\text{SUPP. } H \in C^2$.

$$\omega = a dx + b dy, \quad H = (H^1, H^2)$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= \partial_s \int_0^1 (\omega \cdot H) \cdot H_t = \partial_s \int_0^1 (a(H^1, H^2), b(H^1, H^2)) \cdot (H_t^1, H_t^2) dt \\ &= \int_0^1 (a_x H_s^1 + a_y H_s^2, b_x H_s^1 + b_y H_s^2) \cdot (H_t^1, H_t^2) + (a, b) \cdot (H_{ts}^1, H_{ts}^2) dt \\ &= \int_0^1 a_x H_s^1 H_t^1 + a_y H_s^2 H_t^1 + b_x H_s^1 H_t^2 + b_y H_s^2 H_t^2 \\ &\quad - \partial_t (a, b) \cdot (H_s^1, H_s^2) dt \end{aligned}$$

OSS: I TERMINI DI BORDO
SI CANCELLANO
 $H_s(0, s) = H_s(1, s) = 0$

$$= \int_0^1 \left[\cancel{a_x H_s^1 H_t^1} + a_y H_s^2 H_t^1 + \cancel{b_x H_s^1 H_t^2} + \cancel{b_y H_s^2 H_t^2} - \cancel{a_x H_t^1 H_s^1} - a_y H_t^2 H_s^1 - b_x H_t^1 H_s^2 - \cancel{b_y H_t^2 H_s^2} \right] dt$$

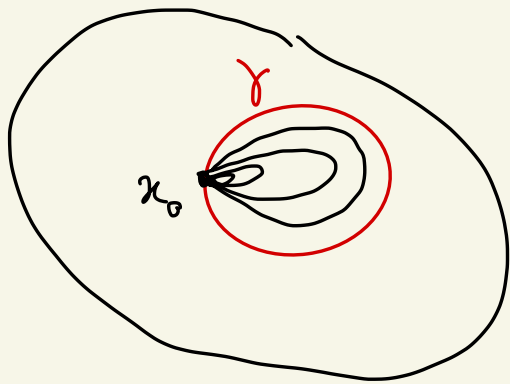
$$= \int_0^1 (a_y - b_x) (H_s^2 H_t^1 - H_t^2 H_s^1) dt = 0 \quad \text{POICHÉ' È CHIUSA.}$$

DEF: Δ SI DICE SEMPLICEMENTE CONNESSO

SE OGNI CURVA CHIUSA $\gamma: [0,1] \rightarrow \Delta$

CON $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in \Delta$ È OMOLOGA IN Δ

A ESTREMI FISSI ALLA CURVA COSTANTE $i_{x_0}(t) = x_0 \forall t$.



$$\exists H: [0,1]^2 \rightarrow \Delta \text{ t.c.}$$

$$H(0,s) = H(1,s) = x_0 \quad \forall s$$

$$H(t,0) = \gamma(t), \quad H(t,1) = x_0 \quad \forall t$$

OSS: $\gamma \sim i_{x_0} \in \omega \text{ CHIUSA} \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$

OSS: $\gamma \sim i_{x_0} \Rightarrow \gamma \sim i_{x_1} \quad \forall x_1 = \gamma(\bar{t})$

COR: $\Delta \text{ SEMPL. CONNESSO, } \omega \text{ CHIUSA} \Rightarrow$
 $\omega \text{ ESATTA}$

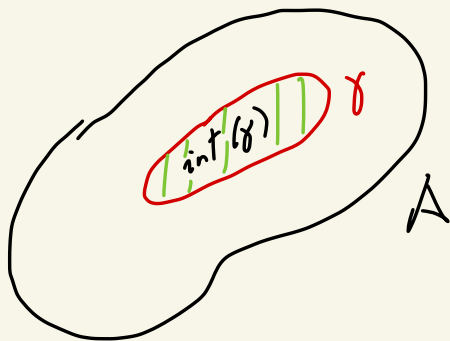
OSS: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è SEMPL. CONN. $(\Leftrightarrow)$

$\forall \gamma: [a,1] \rightarrow A$ CURVA SEMPLICE CHIUSA
(INIETTIVA)

$$\Rightarrow A \ni \text{int}(\gamma)$$

$\text{int}(\gamma)$ è LA COMPONENTE CONNESSA LIMITATA
DI $\mathbb{R}^2 \setminus \text{spt}(\gamma)$

CIOÈ "A NON HA BUCHI"

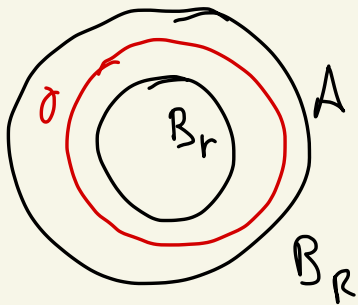


A CONVESSO $\Rightarrow A$ SEMPL. CONNESSO

(VERA IN $\mathbb{R}^n$)

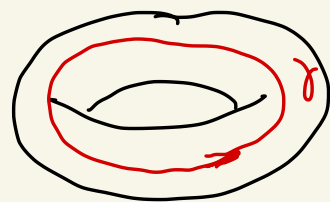
$$A = B_R \setminus B_r \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow A$ NON SEMPL. CONNESSO



$A = \text{Toro in } \mathbb{R}^3$

NON SEMPL. CONNESSO



OSS: A NON È SENPL. CONNESSO $\Rightarrow$

$\exists$ FORNE CHIUSE NON ESATTE

COSTRUZIONE DEL GRUPPO FOND. DI A

SIA $x_0 \in A$ $\in$ $C_{x_0} = \left\{ \gamma: [0,1] \rightarrow A \text{ CURVE CON} \right.$
 $\left. \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \right\}$

CONSIDERIAMO $\pi_1(A, x_0) = C_{x_0} / \sim$

DEF. IN C_{x_0} L'OPERAZIONE $*$: $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

PROP: * DEFINISCE UNA STRUTTURA DI
GRUPPO (NON COMMUTATIVO) IN $\pi_1(A, x_0)$:

$$[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$$

DIN: VERIFICARE CHE

① $\gamma_1 \sim \sigma_1, \gamma_2 \sim \sigma_2 \Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \sim \sigma_1 * \sigma_2$

② $([\gamma] + [\sigma]) + [\rho] = [\gamma] + ([\sigma] + [\rho])$

③ DATA $\gamma \exists \sigma$ T.C. $[\gamma] + [\sigma] = [i_{x_0}]$
(BASTA PRENDERE $\sigma(t) = \gamma(1-t)$)

BUONA DEF

ASSOCIATIVA

OSS: Δ CONNESSO, $x_0, x_1 \in \Delta \Rightarrow (\pi_1(\Delta, x_0), +) \simeq (\pi_1(\Delta, x_1), +)$
ISOMORFISMO DI GRUPPI

DEF: Δ CONNESSO

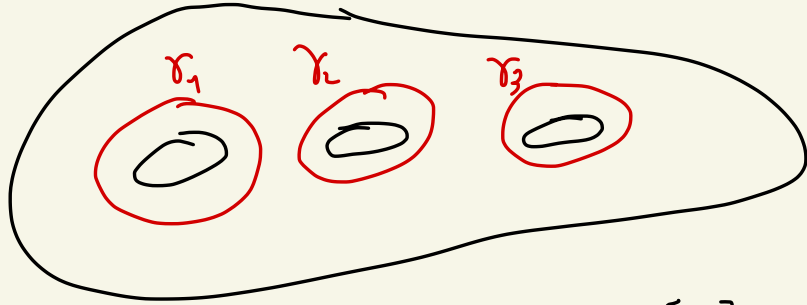
$(\pi_1(\Delta, x_0), +)$ SI DICE GRUPPO FONDAMENTALE
DI Δ

OSS: Δ CONNESSO E'

SEMPL. CONNESSO $(\Rightarrow) \pi_1(\Delta) = \{0\}$

PROP: Δ CONNESSO, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_N]$ GENERATORI DI $\pi_1(\Delta)$
 ω CHIUSA E $\int_{\gamma_i} \omega = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \omega$ ESATTA

ES: $A \subseteq \mathbb{R}^2$



A HA N -BUCCHI, $\text{int}(\gamma_i) \neq \emptyset$ BUCO $\Rightarrow [\gamma_i]$ GENERANO
 $\pi_1(A)$

$\pi_1(A) =$ GRUPPO LIBERO GENERATO DA $[\gamma_1], \dots, [\gamma_N]$

9/3/2023

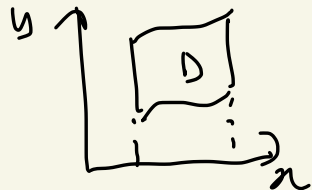


TEOREMA DI GAUSS - GREEN

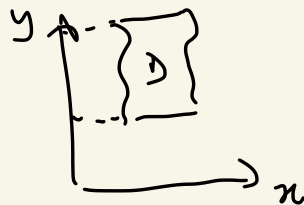
DEF: $D \subset \mathbb{R}^2$ CHIUSURA DI UN APERTO

① D NORMALE RISP. A x SE
 $\exists f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $D = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x) ; x \in [a, b]\}$
con $f \leq g$

D NORMALE RISP. A y , SI SCAMBIA x CON y



NORM. RISP. A x



① D NORMALE REGOLARE SE $f, g \in C^1$

② D REGOLARE SE È UNIONE FINITA DI

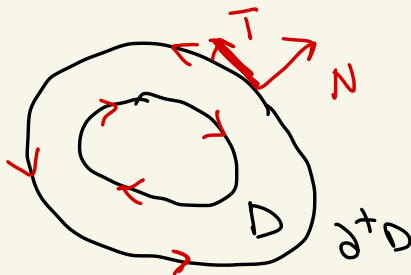
DOMINI NORMALI REGOLARI CON INTERNO DISGIUNTO

OSS: D REGOLARE $\Rightarrow \partial D$ C^1 A TRATTI

∂D È UNIONE FINITA DI CURVE CHIUSE C^1 A TRATTI

$\partial^+ D$ È L'ORIENTAZIONE "POSITIVA" DI QUESTO SISTEMA DI

CURVE



$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \wedge & \downarrow \\ T & N & \rightarrow -1 \\ \downarrow & & \nearrow \\ \text{TANG. A } \partial^+ D & & \text{NORM. ESTERNA A } D \end{array}$$

TEO (GAUSS GREEN)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ REGOLARE, $f \in C^1(\bar{D})$ con $\bar{D} \cap \partial D$ APERTO

$\Rightarrow$

$$(1) \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} f dy$$

$$(2) \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial^+ D} f dx$$

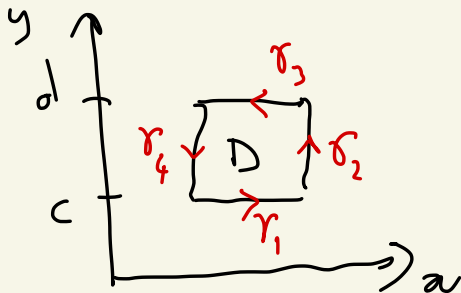
DIN:

DIMOSTRIANO ①, ② SI FA ALLO STESSO NODO.

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i, \quad D_i \text{ NORMALE REGOLARE.}$$

①a SUPP. D NORMALE RISP. A y .

$$\exists h, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = \{(x, y) : h(y) \leq x \leq g(y)\}$$



$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{df}{dx} dx dy = \int_c^d f(g(y), y) - f(h(y), y) dy$$

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f \langle T_i, e_2 \rangle = \int_{\gamma_2} f \langle T_2, e_2 \rangle + \int_{\gamma_4} f \langle T_4, e_2 \rangle$$

$$\gamma_2(y) = (g(y), y) \quad y \in [c, d]$$

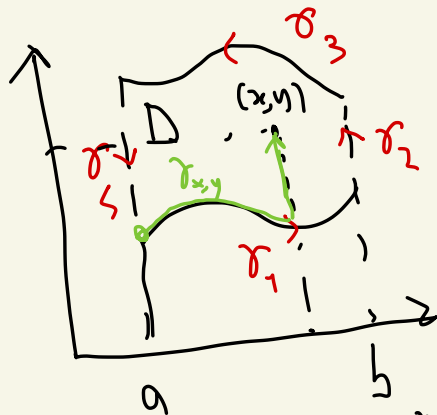
$$T_2 = \frac{(g'(y), 1)}{\sqrt{1 + g'(y)^2}} \leftarrow \gamma_2'$$

$$\int_{\gamma_2} f \langle T_2, e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) \cdot \langle \gamma_2', e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) dy$$

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \int_c^d f(g(y), y) - f(h(y), y) dy$$

(1b) supp. D norm. rispetto a x

$$D = \{(x, y) : h(x) \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$$



$$\gamma_1(x) = (x, h(x))$$

$$\gamma_1'(x) = (1, h'(x))$$

INTRODUCIAMO IL "POTENZIALE" $F(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{xy}} f dy = \int_a^x f(t, h(t)) h'(t) dt + \int_{h(x)}^y f(x, t) dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cancel{f(x, h(x))} h'(x) + \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \cancel{f(x, h(x))} \cdot h'(x) \\ &= \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \end{aligned}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left(\int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx + f dy$$

↓
ESTATA

$$\int_{\partial^+ D} dF = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} f dy = - \int_{\partial^+ D} \left(\int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx$$

$$= - \int_{\gamma_1} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt dx + \int_{\gamma_3} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} \gamma_1(s) = (s, h(s)) & s \in [a, b] & \gamma_1'(s) = (1, h'(s)) \\ \gamma_3(s) = (s, g(s)) & s \in [a, b] & \gamma_3'(s) = (1, g'(s)) \end{array} \right]$$

$$\langle \gamma_1'(s), e_1 \rangle = \langle \gamma_3'(s), e_1 \rangle = 1$$

$$= - \int_a^b \int_{h(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt dx + \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt dx$$

= 0

$$= \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

(1c) D REGOLARE

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x}$$

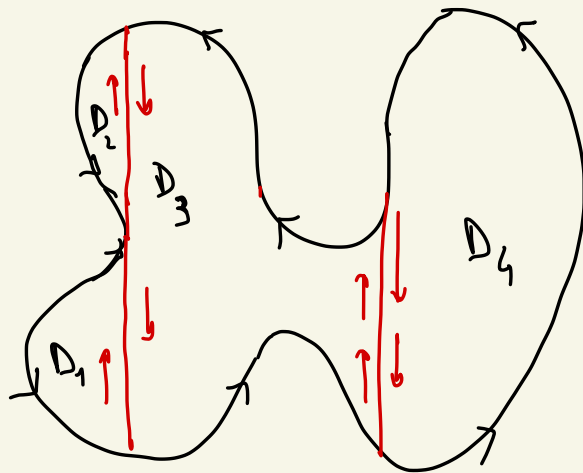
$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i.$$

ADDITIVITÀ DI $\int$

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_i \int_{D_i} f dy$$

L'INTEGRALE DI $f dy$

SU $\partial^+ D_i \cap \partial^+ D_j$ È NULLO
($i \neq j$)



CONSEGUENZE DEL TEOREMA

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ REGOLARE}$$

$$F: A \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A \supseteq D \text{ APERTO}$$

$$F = (F_1, F_2)$$

CANPO DI VETTORI C^1

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

DIVERGENZA DI F

$$\left[\partial^+ D = (x(t), y(t)), t \in I \right]$$

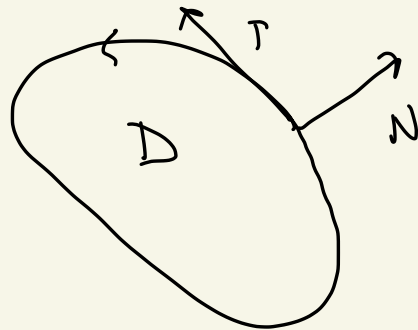
TEO (DIVERGENZA)

G.G.

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \int_D \frac{\partial F_2}{\partial y} \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\partial^+ D} F_1 d\cancel{x} - F_2 dx = \int_I \int_{\partial^+ D} F_1 \cdot y' - F_2 x' dt$$

$$= \sum \int_{\gamma} F \cdot N = \int_{\partial D} F \cdot N$$

FLUSSO DI F
ATTRAVERSO ∂D



$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$T(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{|x'|}$$

$$N(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|x'|}$$

TEO (STOKES)

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy$$

rot(F)

ROTORE DI F



INTEGRALE DELLA FORMA ASSOCIATA A
 F LUNGO $\partial^+ D$

LAVORO o CIRCOLTAZIONE DI F LUNGO $\partial^+ D$

OSS: SE F È IRROTATIONALE, CIOÈ $F_1 dx + F_2 dy$ È CHIUSO

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall D \subseteq \Delta \text{ REGOLARE}$$

QUINDI SE Δ È SIMPL. CONNESSO

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall \gamma \text{ CHIUSA IN } \Delta \Rightarrow \text{LA FORMA È ESATTA}$$

COR: (FORMULA DELL'AREA)

$$\text{SE SCELGO } f(x, y) = x \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

$$|D| = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\partial^+ D} x dy = - \int_{\partial^+ D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x dy - y dx$$

15/3/2023



INTEGRAZIONE SU K-SUPERFICI (APPROCCIO PARAMETRICO)

DEF: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ È UNA SUP. DI DIMENSIONE K ($\circ$ K-SUP)

DI CLASSE C^1 , SE $\forall x_0 \in \Sigma$

$\exists \varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B_1 \subseteq \mathbb{R}^K$ PALLA UNITARIA,

DI CLASSE C^1 T.C. $x_0 \in \varphi(B_1) \subseteq \Sigma$

E $\dim(D\varphi(x)) = K \quad \forall x \in B_1$.



DIAMO CHE Σ È "EMBEDDED" SE

POSSIAMO SEMPRE SCEGLIERE φ T.C. $\varphi(B_1) \supseteq \Sigma \cap B_r(x_0)$, $r > 0$.

COME SI CALCOLA L'AREA K-DIM. DI Σ ?

SUPPONIAMO $\Sigma = \varphi(U)$ $\varphi \in C^1$ $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = K$
 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

① $\varphi(x) = Lx$ L MATRICE $K \times n$ $\text{rk}(L) = K$

①a L ORTOGONALE, $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$
 $L^t L = \text{Id}_K$

$$H^K(\Sigma) \doteq |U|_{\mathbb{R}^K}$$

↳ MISURA K-DIM. DI Σ

1b) L GENERALE, POSSO SCRIVERE

$$L = L' \cdot S$$

$$S \in M_{k \times k}$$

L' ORTOGONALE

$$H^k(\Sigma) = H^k(L' \cdot S \cdot (U)) = |S(U)|_k = |\det S| \cdot |U|_k$$

↓
FORMULA DELL'AREA
IN $\mathbb{R}^k$

OSS:

$$L^t L = S^t \underbrace{L'^t L'}_{Id_{\mathbb{R}^k}} S = S^t S \in M_{k \times k}$$

$$\det(L^t L) = \det(S^t S) = \det(S)^2$$

$$H^k(\Sigma) = \sqrt{\det(L^t L)} |U|_{\mathbb{R}^k}$$

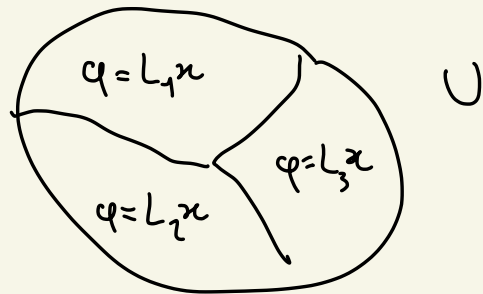
OSS: (FORMULA DI CAUCHY-BINET)

$$\det(L^t L) = \sum_{\pi \text{ minore di rango } K \text{ di } L} \det(\pi)^2$$

② $\Sigma = \varphi(U)$

φ LINEARE A TRATTI

$$H^K(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(D_\varphi^t D_\varphi)} dx$$



③ $\Sigma = \varphi(U)$ $\varphi \in C^1$ $\text{rk}(D_\varphi(x)) = K \quad \forall x \in U$

$\exists \varphi_n$ LINEARI A TRATTI T.C.

↓

ANDREBBE DIMOSTRATO

$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in D\varphi_n(x) \rightarrow D\varphi(x)$ UNIF. IN $x \in U$
PER $n \rightarrow \infty$

$$H^k(\Sigma) := \lim_n H^k(\varphi_n(U)) =$$

$$= \lim_n \int_U \sqrt{\det(D\varphi_n^t D\varphi_n)} = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$$

OSS: TALVOLTA SI USA LA NOTAGIONE $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi}$

OSS: $\boxed{k=n}$ RITROVIAMO LA FORMULA $|\varphi(v)| = \int_U J_\varphi$

$\boxed{k=1}$ $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $D\varphi = \varphi'$

$$H^1(\varphi(a,b)) = L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|$$

$$J_\varphi = |\varphi'|$$

$\boxed{k=2, n=3}$ $\varphi = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \varphi_3(x,y))$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} \\ \varphi_{3x} & \varphi_{3y} \end{pmatrix} \quad D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} |\varphi_x|^2 & \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle & |\varphi_y|^2 \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \sqrt{|\varphi_x|^2 |\varphi_y|^2 - \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle^2} = |\varphi_x \wedge \varphi_y|$$

$$a \wedge b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

↑

PRODOTTO VETTORE

④

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$$

$$\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset \quad i \neq j$$

$$H^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \mathcal{I} \varphi_i dx$$

ESEMPIO (GRAFICI)

$$\Sigma = P_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ APERTO}$$

$$f \in C^1$$

$$\varphi(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

$$H^{n+1}(P_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx$$

OSS: $H^k(\Sigma)$ È INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONE

$$\Sigma = \varphi(U) = \psi(V)$$

$$V = \Phi(U)$$

Φ DIFFEOMORFISMO C^1 TRA U E V

$$\psi = \varphi \circ \Phi^{-1}$$

$$D\psi = D\varphi \cdot [D\Phi]^{-1}$$

$$D\varphi = D\psi \cdot D\Phi$$

$$\begin{aligned} H^k(\Sigma) &= \int_U \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \int_U \sqrt{\det (D\Phi)^t D\psi^t D\psi D\Phi} \\ &= \int_U J_\psi J_\Phi dx \stackrel{\text{FORMULA DELL'AREA}}{=} \int_V J_\psi \end{aligned}$$

DEF:

$$\Sigma = \varphi(U) \quad k\text{-SUPERFICIE}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ CONTINUA} \quad \Sigma \subseteq A \text{ APERTO DI } \mathbb{R}^n$$

$$\int_{\Sigma} f := \int_U (f \circ \varphi) J_{\varphi} dx$$

$$\text{IN GENERALE} \quad \Sigma = \overline{\bigcup_i \varphi_i(U_i)}$$

$$\int_{\Sigma} f := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f \circ \varphi_i) J_{\varphi_i} dx$$

OSS:

$\int_{\Sigma} f$ È INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONI

FLUSSO DI UN CAMPO DI VETTORI

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -SUR. EMBEDDED,

$\forall x \in \Sigma \quad \exists$ 2 SCELTE DEL VETTORE NORMALE IN

$$T_{\Sigma}(x)^{\perp} \quad N(x) \text{ e } -N(x)$$

Σ SI DICE ORIENTABILE SE $\exists$ SCELTA CONTINUA
DI $N(x)$.

(Σ, N) SI DICE UNA SUR. ORIENTATA

DEF: (Σ, N) SUP. ORIENTATA DI DIR. $n-1$ IN $\mathbb{R}^n$

$v: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ CAMPO DI VETTORI CONTINUO

$\Sigma \subseteq \Delta$ APERTO

$\int_{\Sigma} \langle v, N \rangle$ SI DICE FLUSSO DI v
ATTRAVERSO Σ

OSS: DIPENDE DALLA SCELTA DELL'ORIENTAZIONE N

ES: $\Sigma = \partial U$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO
CON BORDO C^1

Σ È ORIENTABILE

$N^e(x)$ NORMALE ESTERNA

$N^i(x)$ " INTERNA

$$\left(N^e(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \text{ SE } U = \{f < 0\} \right)$$

OSS: QUANDO SI CONSIDERA IL FLUSSO DI v
ATTRAVERSO $\Sigma = \partial U$, DI NORMA SI CONSIDERA $N^e(x)$.

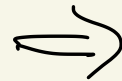
TEOREMA (DIVERGENZA)

$$\Sigma = \partial U \quad \text{IPERSUP. } C^1 \quad (\sigma \in C^1 \text{ A TRATTI})$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{APERTO LIMITATO}$$

$$v: A \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{CAMPO DI VETTORI DI CLASSE } C^1$$

$$\bar{U} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{APERTO}$$



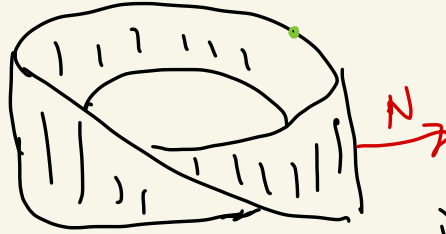
Dove

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}$$

È LA DIVERGENZA DI v

$$\int_{\Sigma} v \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} v(x) dx$$

OSS: NON TUTTE LE $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ EMBEDDED
SONO ORIENTABILI



NASTRO DI MÖBIUS

OSS: SE CONSIDERO $v = \nabla f$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ DI CLASSE C^2

$$A \cong \bar{U} \quad \Sigma = \partial U \Rightarrow$$

$$\int_{\partial U} \nabla f \cdot N^e = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_U \Delta f$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

LAPLACIANO DI f

16/3/2023



TEOREMA (DIVERGENZA)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO

$\Sigma = \partial U$ DI CLASSE C^1

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ DI CLASSE C^1

$\bar{U} \subseteq A$ APERTO DI $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \int_{\partial U} F \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} F$$

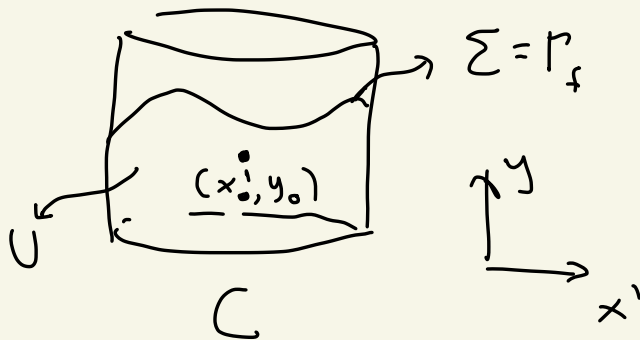
$$\text{DOVE } \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

D.I.N.

$$\textcircled{1} \quad (x', y) \in \mathbb{R}^n$$

$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$(x'_0, y_0) \in \Sigma$$



$$\text{SUPP. CHE} \quad \exists C = B_r(x'_0) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

$$\in f: B_r(x'_0) \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \quad \text{D.I. CLASS } C^1$$

$$\text{T.C.} \quad \sum_n C = P_f.$$

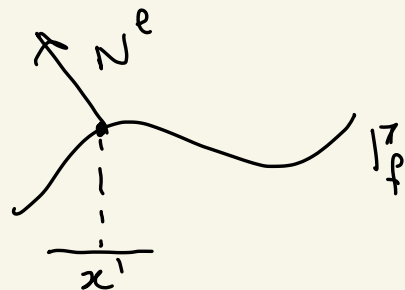
$$\text{SUPP. CHE} \quad v(x) = u(x) \cdot e_n \quad u(x): A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{spt } u \subseteq C$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial u}{\partial y}(x', y)$$

$$\int_U \operatorname{div} v = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y}(x', y) = \int_{B_r(x'_0)} \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx'$$

$$= \int_{B_r(x'_0)} u(x', f(x')) = \int_{\Gamma_f} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}} = \int_{\Sigma \cap C} u e_n \cdot N^e = \int_{\Sigma} v \cdot N^e$$

$$N^e = \left(-\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$



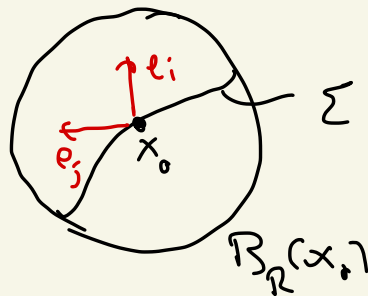
② $x_0 \in \Sigma$ SUPP. CHE $\exists R$ T.C.

$$\text{spt } \nu \subseteq B_R(x_0) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\exists f_i: \ell_i^\perp \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{T.C. } \sum \cap B_R(x_0) = \prod_{f_i} \text{ IN DIREZIONE } \ell_i$$

OSS: SI PUÒ SEMPRE SOSTENERE,
PRENDENDO R PICCOLO,
SE $N(x)$ NON È PARALLELO
A $\ell_i \quad \forall i$.



$$\int_U \operatorname{div} v = \int_U \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_U \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_{\Sigma} v_i e_i \cdot N = \int_{\Sigma} v \cdot N$$

PER ① APPLICATO CON $v = v_i \cdot e_i$

③ Supp. $\operatorname{spt}(v) \subseteq B_R(x_0)$ NA CHE $N(x_0) = e_i$ PER QUALCHE i
SCEGLIAMO $L \in M_{n,n}$ ORTOGONALE T.C. $LN(x_0)$ NON È $\parallel$ A $e_i \forall i$

E OSSERVIAMO CHE

VA VERIFICATO

$$\int_U \operatorname{div} v = \int_{B_R(x_0) \cap U} \operatorname{div} v \, dx = \int_{L(B_R(x_0) \cap U)} \operatorname{div} Lv(L^{-1}y) \, dy = \int_{L(\Sigma)} Lv(L^{-1}y) LN(L^{-1}y)$$

②

$$= \int_{L(\Sigma)} v(L_y^{-1}) \cdot N(L_y^{-1}) = \int_{\Sigma} v(x) N(x) \quad x = L^{-1}y$$

↘ VA VERIFICATO

④ DATO CHE Σ È COMPATTO POSSIAMO

TROVARE $x_1, \dots, x_N \in \Sigma$ E $R > 0$

T.C. $\Sigma \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_R(x_i)$, $\Sigma \cap B_R(x_i)$ È GRAFICO.

$\forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \exists \eta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$

PARTIZIONE DELL'UNITÀ

DI CLASSE C^1 T.C. $\sum_{i=0}^N \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{U}$, $\text{spt } \eta_0 \subseteq U$, $\text{spt}(\eta_i) \subseteq B_R(x_i) \quad \forall i$.

$$v = \sum_{i=0}^N v \eta_i \quad \forall x \in \bar{U} \quad \text{spt}(v \eta_i) \subseteq B_R(a_i) \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\text{div } v = \sum_{i=0}^N (\text{div } v) \eta_i + v \cdot \nabla \eta_i = \text{div } v + v \cdot \nabla \left(\sum_{i=0}^N \eta_i \right) = \text{div } v$$

$$\int_U \text{div } v = \sum_{i=0}^N \int_U \text{div}(v \eta_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^N \int_U \text{div}(v \eta_i) \stackrel{(3)}{=} \quad \downarrow$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_U (v \cdot N) \eta_i = \int_U v \cdot N$$

$$(*) \quad \int_U \text{div}(v \eta_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{div } w = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx = 0, \quad w(x) = \begin{cases} v \cdot \eta_0 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

↓
FUBINI-TONELLI

INTEGRALI SU SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma = \varphi(D) \quad D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ DOMINIO REGOLARE}$$

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ di classe } C^1, \text{ INIETTIVA, } \text{rk}(D\varphi) = 2$$

$$\overline{D} \subseteq A$$

$$\text{rk}(D\varphi) = 2 \Leftrightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \overline{D}$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v \in \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^\perp = T\Sigma^\perp \quad \text{QUINDI} \quad N := \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

DEFINISCE UN'ORIENTAZIONE DI Σ .

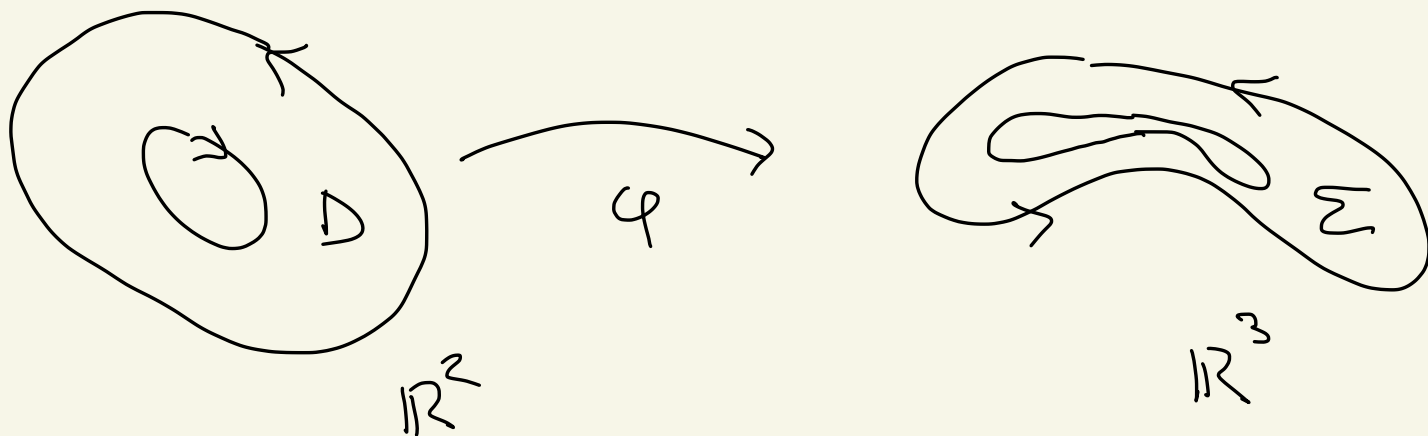
① $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUO

$$\int_{\Sigma} f = \int_D f(\varphi) J_{\varphi} = \int_D f(\varphi) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv$$

② $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ CAMPO DI VETTORI CONTINUO

$$\int_{\Sigma} F \cdot N = \int_D F(\varphi) \cdot \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \cdot |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \int_D F(\varphi) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv$$

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$



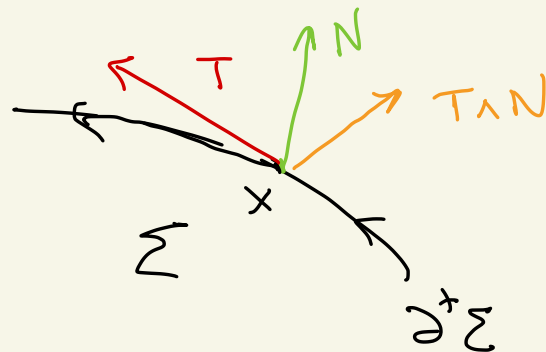
SE CONSIDERIAMO L'ORIENTAZIONE POSITIVA DI ∂D
 φ INDUCE UN'ORIENTAZIONE POSITIVA DI $\partial \Sigma$
 CHE INDICHIAMO CON $\partial^+ \Sigma$

SI PUÒ VERIFICARE CHE

$$\forall x \in \partial \Sigma$$

IL VETTORE $T \wedge N \in T_{\Sigma}(x)$

~~*~~ PUNTA SEMPRE "FUORI" DA Σ .



ANALOGAMENTE DATA (Σ, N) SUP. ORIENTATA IN $\mathbb{R}^3$
È DEF. L'ORIENTAZIONE POSITIVA $\partial^+ \Sigma$

DALLA CONDIZIONE ~~*~~

TEOREMA (STOKES)

(Σ, N) SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$

COMPATTA, ORIENTATA, DI CLASSE C^1

E DATO $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ DI CLASSE C^1

CON $\Sigma \subseteq A$ APERTO

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Sigma} (\text{rot } F) \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F}$$

SI DICE
ROTORE DI F
 $(\text{rot } F, \nabla \wedge F)$

DOVE $\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

22/3/2023



TEOREMA (STOKES)

(Σ, N) SUP. ORIENTATA, COMPATTA, CON BORDO, DI CLASSE C^1

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ N CAMPO NORMALE CONTINUO

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ $A \supseteq \Sigma$ APERTO $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F$$

$$\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

ROTORE DI F

DIN:

① Supp. $\Sigma = \varphi(\bar{D})$ $\varphi: \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ INIETIVO

D DOMINIO REGOLARE IN $\mathbb{R}^2$

Supp. $\varphi \in C^2$ (IL CASO $\varphi \in C^1$ SI FA PER APPROSS.)

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$F(x, y, z) = \left(\underset{\textcolor{red}{F}_1}{X(x, y, z)}, \underset{\textcolor{red}{F}_2}{Y(x, y, z)}, \underset{\textcolor{red}{F}_3}{Z(x, y, z)} \right)$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_D (\text{rot } F)(\varphi) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \\ J_\varphi = |\varphi_u \wedge \varphi_v| \end{array} \right.$$

$$= \int (z_y - y_z) \left(y_z - y_z \right) + (x_z - z_x) \left(x_z - x_z \right) + (y_x - x_y) \left(x_y - x_y \right)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

$$= (y_z - y_z, x_z - x_z, x_y - x_y)$$

$$\text{rot } F = (z_y - y_z, x_z - z_x, y_x - x_y)$$

$$\partial \Sigma = \varphi(\partial D) \quad \gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [0, 1]$$

PARAMETRIZATION $\partial^+ D$

$$\varphi(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(-), z(-))$$

PARAMETRIZATION $\partial^+ \Sigma$

$$\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v' + z_u u' + z_v v')$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F = \int_0^1 F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt = \int_0^1 (X x_u + Y y_u + Z z_u) u' + (X x_v + Y y_v + Z z_v) v' dt$$

$$= \int_{\partial^+ D} (X x_u + Y y_u + Z z_u) du + (X x_v + Y y_v + Z z_v) dv$$

GAUSS-GREEN

$$= \int_D \left((X x_v + Y y_v + Z z_v)_u - (X x_u + Y y_u + Z z_u)_v \right) du dv$$

$$= \int_D \left(\cancel{X x_u x_v} + X y_u x_v + X z_u x_v + \cancel{Y x_u y_v} + Y y_u y_v + Y z_u y_v + \cancel{Z x_u z_v} + Z y_u z_v + Z z_u z_v - \cancel{X x_v x_u} - X y_v x_u - X z_v x_u - \cancel{Y x_v y_u} - Y y_v y_u - Y z_v y_u - \cancel{Z x_v z_u} - Z y_v z_u - Z z_v z_u \right) du dv$$

$$= \int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$$

VERIFICA DIRETTA

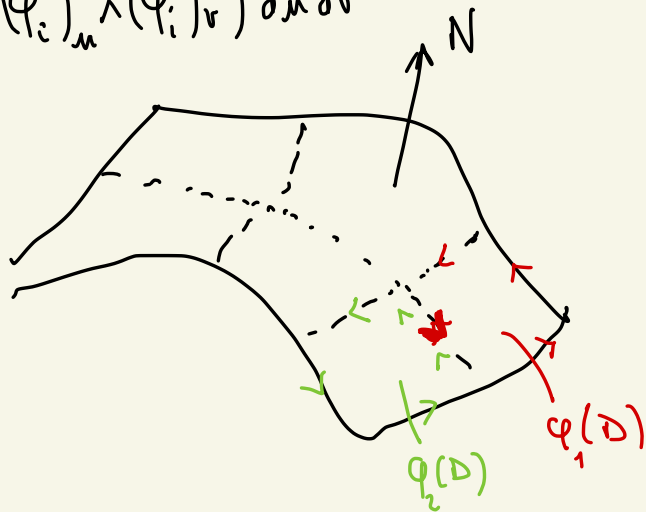
② In general $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{D})$ $\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset \quad i \neq j$

$$N = \frac{(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v}{|(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v|} \quad \text{in } \varphi_i(\bar{D}) \subseteq \Sigma$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \sum_{i=1}^N \int_D \text{rot } F(\varphi_i) \cdot ((\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v) du dv$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F^* = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ \Sigma_i} F$$

$$\Sigma_i = \varphi_i(\bar{D})$$



⑧ SEGUE DAL FATTO CHE

$$\int_{\partial^+ \Sigma_i \cap \partial \Sigma_j} F = - \int_{\partial^+ \Sigma_j \cap \partial \Sigma_i} \bar{F}$$

CIOE' $\partial^+ \Sigma_i$ E $\partial^+ \Sigma_j$ SONO ORIENTAZIONI OPPOSITE
DELLA "CURVA" $\partial \Sigma_i \cap \partial \Sigma_j$

K-FORME DIFFERENZIALI IN $\mathbb{R}^n$

FORME MULTILINEARI ALTERNANTI DI GRADO K
(K-COVETTORI)

UN K-COVETTORE ω È UNA FUNZIONE

$$\omega: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1 \dots h_k) \rightarrow \omega(h_1 \dots h_k) \quad \text{T.C.}$$

① ω È LINEARE IN OGNI h_i , CIOÈ

$$\omega(h_1 \dots h_{i-1}, \alpha u + \beta v, h_{i+1} \dots h_k) = \alpha \omega(\dots, u, \dots) + \beta \omega(\dots, v, \dots)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\textcircled{2} \quad \omega(l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(l_1, \dots, l_k)$$

ES: $\omega(l) = v \cdot l$ 1-COVETTORE

$v \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(l_1, \dots, l_n) = \det \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} \quad n\text{-COVETTORE}$$

OSS: $l_i = l_j$ per $i \neq j$ $\omega(l_1, \dots, l_k) = 0$

OSS: I k -COVETTORI COSTITUISCONO UNO
SP. VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ CHE SI INDICA CON $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$

DATI $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \{1, \dots, n\}$ PONGO $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

DEFINISCO $d\alpha_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}$

T.C. $d\alpha_\lambda (h_1, \dots, h_k) = \det \left((h_j)_{\lambda_i} \right)_{ij}$ K -COVETTORE

$\hookrightarrow$ MATRICE $K \times K$

L'INSIEME DEI $d\alpha_\lambda$ CON $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$

DEFINISCONO UNA BASE DI $\Lambda_k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \Lambda_k = \binom{n}{k}$

ES: $\odot d\alpha_1, \dots, d\alpha_n$ SONO UNA BASE DI $\Lambda_1(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$

○ $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$ SONO UNA BASE DI $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$

○ $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ GENERA $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$ ($\dim \Lambda_n(\mathbb{R}^n) = 1$)

OSS: $dx_i = 0$ SE $\lambda_i = \lambda_j$ PER QUALCUNE $i \neq j$

$dx_{\lambda'} = \text{sgn}(\sigma) dx_\lambda$ SE $\lambda'_i = \lambda_{\sigma(i)} \forall i$

IN PART. $dx_\lambda = 0 \quad \forall \lambda$ SE $k > n$

DEF: È DEFINITO UN PRODOTTO ESTERNO $\wedge$

$\Lambda_k \times \Lambda_l \rightarrow \Lambda_{k+l}$ $\wedge(\omega, \alpha) = \omega \wedge \alpha$

DEFINITO SULLA BASE

$$\wedge \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_k}}{dx_{\lambda}} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_l}}{dx_{\mu}} \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_{k+l}}}{dx_{\lambda}} \wedge dx_{\mu} = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_l}$$

SI ESTENDE A

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} a_{\lambda} dx_{\lambda} \quad \in \quad \alpha = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,l}} b_{\mu} dx_{\mu}$$

$$\Lambda_{n,k} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_1 < \dots < \lambda_k \right\}$$

PROF. IL PRODOTTO ESTERNO $\wedge$ SODDISFA

$$\odot (a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$$

DISTRIB.

$$\odot c \cdot a \wedge b = c (a \wedge b)$$

$$\odot a \wedge b = (-1)^{kl} (b \wedge a)$$

SE $a \in \Lambda_k$ e $b \in \Lambda_l$

ALTERNANTE

$$\odot (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

ASSOCIATIVO

DEF. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$\omega: A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ SI DICE

UNA k -FORMA DIFFERENZIALE

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_{\lambda}(x) dx_{\lambda}$$

$$\omega_1: A \rightarrow \mathbb{R}$$

DEF: DATE $\omega, \alpha \in \Lambda_k$ k -COVETTORI

SI PUO' DEFINIRE $\omega \cdot \alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda \alpha_\lambda \in \mathbb{R}$

E' UN PRODOTTO SCALARE SU Λ_k

OSS: LE k -FORME IN Δ SONO UNO SPAZIO VETTORIALE

DEF: DATA ω k -FORMA, CIOE' $\omega = \sum_{\lambda} \omega_\lambda dx_\lambda$, $\omega_\lambda \in \mathbb{C}^1$

DEFINIAMO LA $(k+1)$ -FORMA

$$d\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda$$

$\hookrightarrow$ 1-FORMA $\hookrightarrow$ k -FORMA

$$d\omega_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_i} dx_i$$

d SI DICE DIFFERENZIALE ESTERNO

PROP (PROPRIETÀ DI d)

$$\textcircled{1} \quad d(c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) = c_1 d\omega_1 + c_2 d\omega_2 \quad \begin{array}{l} \omega_1, \omega_2 \text{ K-FORME} \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$$

a k-forma b l-forma

$$\textcircled{3} \quad d^2 a = d(da) = 0 \quad \forall a \text{ K-forma } C^2$$

30/3/2023



FORME DIFFERENZIALI

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$$\Omega^k(A) = \left\{ \omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n) \quad k\text{-FORMA DIFF.} \right\}$$

↓
SP. VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$\wedge$ PRODOTTO ESTERNO

d DIFFERENZIALE ESTERNO

$$\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \rightarrow \Omega^{k+l}$$

$$d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$$

$$\omega = \sum_i \omega_i dx_i$$

$$d\omega = \sum_i d\omega_i \wedge dx_i$$

PROP: ① $d(a+b) = da + db$

② $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$ $a \in \Omega^k$

③ $\omega \in C^2 \Rightarrow d^2 \omega = 0$

DIN ① LINEARITÀ DELLA DERIVATA

② $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} dx_{\lambda}$ $b = \sum_{\mu} b_{\mu} dx_{\mu}$

$a \wedge b = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda} b_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$

$d(a \wedge b) = \sum (da_{\lambda} \cdot b_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu}) dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$

$= \sum da_{\lambda} dx_{\lambda} \wedge b_{\mu} dx_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$
 $\hookrightarrow 1 \text{ FORN } A$

$$\begin{aligned}
 &= da \wedge b + \sum (-1)^k a_j dx_j \wedge db_\mu \wedge dx_\mu \\
 &= da \wedge b + (-1)^k a \wedge db
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad d(dx_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\omega_1 \text{ FUNCTIONE } C^2, \quad d\omega_1 = \sum_i \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} dx_i$$

$$d^2 \omega_1 = d \left(\sum_i \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

= 0

$$d^2 \omega = d \sum_1 d\omega_1 \wedge dx_1 = \sum_1 d^2 \omega_1 \wedge dx_1 = 0$$

DEF: $\omega \in \Omega^k$ È ESATTA SE $\omega = d\omega'$ $\omega' \in \Omega^{k-1}$
" È CHIUSA SE $d\omega = 0$

OSS: $\omega \in C^1$ ESATTA $\Rightarrow$ ω CHIUSA

OSS: LE FORME CHIUSE (RISP. ESATTE) SONO

SOTTOSPAZI DI Ω^k

SI DEFINISCE $H^k(A) = \{ \omega \in \Omega^k \text{ CHIUSE} \} / \sim$

$\omega_1 \sim \omega_2$ SE $\omega_1 - \omega_2$ È ESATTA

$K^{\mathbb{R}}$ GRUPPO DI COHOMOLOGIA DI A (A COEFF. REALI)

ES: $H^1(A) = \{0\}$ se A è semplicemente connesso

PULL BACK DI UNA FORMA DIFF.

ES: $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $f \in C^1$ INIETTIVA
 $v(x)$ CAMPO DI VETTORI SU A $v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$
 f INDUCE UN CAMPO $w: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ $w(f(x)) = df(v(x))$

DATI f COME SOPRA, $w \in \Omega^k(\mathbb{R}^m) \Rightarrow$

$w^\# \in \Omega^k(A)$ PULL BACK DI w ATTRAVERSO f

È DEFINITO DA $w^\#(v_1, \dots, v_k) = w(df v_1, \dots, df v_k)$

IN COORDINATE, SE $\omega = \sum \omega_i dx_i$, SI HA

$$\omega^\# = \sum \left(\omega_i \circ f \right) dx_i^\# , \text{ DOVE}$$

$$y \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \\ x = f(y) \in \mathbb{R}^m$$

$$dx_i^\# = df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} = \sum_{\mu \in \Lambda_{k,n}} \det \left[\frac{\partial (f_{i_1} \dots f_{i_k})}{\partial (y_{\mu_1} \dots y_{\mu_k})} \right] dy_\mu$$

OSS: $\omega = \Omega^q$ cioè $\omega: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega^\# = \omega \circ f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega = \Omega^m(\mathbb{R}^m), \omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, n=m \Rightarrow \omega^\# = (a \circ f) J_f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

PROP $(\omega_1 + \omega_2)^\# = \omega_1^\# + \omega_2^\# , (\omega_1 \wedge \omega_2)^\# = \omega_1^\# \wedge \omega_2^\# , (d\omega)^\# = d\omega^\#$

K-SUP. ORIENTABILI IN $\mathbb{R}^n$

$V \subset \mathbb{R}^n$ sottosp. $\dim V = k$

$(h_1 \dots h_k)$ base di V

$(h_1^1, \dots, h_k^1)$ " " "

$(h_1 \dots h_k) \sim (h_1^1 \dots h_k^1)$ se $\det G > 0$ dove $G \in GL(k)$ è t.r.,
 $G h_i = h_i^1 \quad \forall i$

$\frac{\{(h_1 \dots h_k)\}}{\sim} = \{V^+, V^-\}$ DUE ORIENTAZIONI DI V

CONVENZ. $[(e_1 \dots e_k)]$ SI DICE ORIENTAZIONE POSITIVA DI $\mathbb{R}^k$

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ K -VARIETÀ C^1 SI DICE ORIENTABILE

SE $\exists f: M \rightarrow \{TM^+, TM^-\}$ CONTINUA

UNA TALE f SI DICE UN'ORIENTAZIONE DI M

Oss: NON SIGNIFICA CHE $\exists f: M \rightarrow \{(h_1(x), \dots, h_k(x))\}$ CONT.
BASE DI $T_x M$

Oss: $M = \varphi(U)$ $\varphi \in C^1$ $\text{rk}(D\varphi) = k \Rightarrow$
 M È ORIENT. $\in [(D\varphi(e_1) \dots)]$ È UN'ORIENTAZIONE DI M .

PROP: M ORIENT. $(\Leftrightarrow) \exists \{\varphi_i\}_{i=1}^N$, $\varphi_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 INIETTIVA
T.C. $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U)$ $\text{rk}(D\varphi_i) = k$
 $\hookrightarrow$ CARTE $\text{E } \det(D\Phi_{ij}) > 0 \quad \forall i, j \text{ DOVE } \Phi_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$

ESERCIZIO: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ sup., M ORIENT. ($\Leftarrow$)

$\exists$ SCELTA CONTINUA DI $N: M \rightarrow (TM)^{\perp} \setminus \{0\}$
 $\mathbb{R}$
 $\mathbb{R}$

INTEGRAZIONE DI K -FORME SU K -SUP. ORIENTABILI

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\omega \in \Omega^n(U)$ $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

DEFINIAMO $\int_U \omega := \int_U a$

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 INIETTIVA $\text{rk}(D\varphi) = k$

$M = \varphi(U)$ K -SUP. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$$\int_M \omega = \int_U \omega^{\#}$$

$\omega^{\#}$ PULL BACK DI ω
ATTRAVERSO φ

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -SUP. ORIENTATO

$$M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{U}), \quad \varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset \quad i \neq j$$

$[(d\varphi_i(e_1) \dots d\varphi_i(e_k))] \in L'$ ORIENTAZIONE DI M $\forall i \in \{1, \dots, N\} \forall x \in U$

$$\Rightarrow \int_M \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U)} \omega = \sum_i \int_U \omega_i^\#$$

$\omega_i^\#$ $\in L'$ IL PULL BACK
CON φ_i

oss: SE M^+ E M^- SONO LE DUE ORIENT. DI M

$$\int_{M^+} \omega = - \int_{M^-} \omega$$

PROP: $\int_{\Pi} \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \alpha \int_{\Pi} \omega_1 + \beta \int_{\Pi} \omega_2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Pi_1 \cup \Pi_2} \omega = \int_{\Pi_1} \omega + \int_{\Pi_2} \omega \quad \text{se } \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$$

VARIETÀ CON BORDO

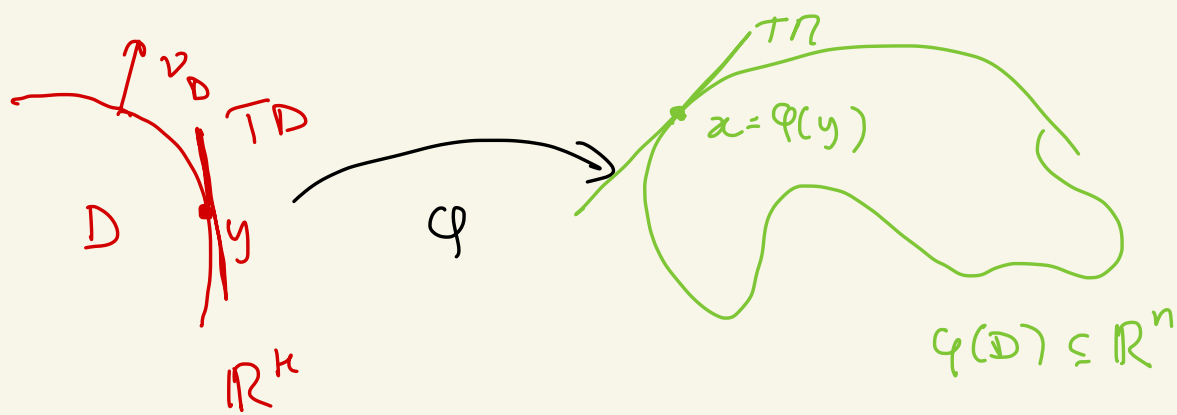
$\mathbb{R}^n \ni \Pi$ k -SUP. C^1 CON BORDO se $\forall x \in \Pi$

$\exists U$ INT. DI x E $D \subseteq \mathbb{R}^k$ DOMINIO REGOLARE (CON BORDO)

E $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi \in C^1$, INIETTIVA, $\dim(D\varphi) = k$

t.c. $\Pi \cap \bar{U} = \varphi(D)$

$\partial \Pi = \bigcup_{\varphi} \varphi(\partial D)$ BORDO DI Π , $(k-1)$ -SUP. C^1
 $\hookrightarrow$ (NON PROPRIO...)



M ORIENTATA POSSO SCEGLIERE φ T.C.

$[(d\varphi(e_i) \dots)]$ È L'ORIENT. DI M

$\forall y \in \partial D$ SCELGO $(v_1 \dots v_{k-1})$ BASE DI $T\partial D$ T.C.

$[(v_1, \dots, v_{k-1}, v_D(y))] = [(e_1 \dots e_k)]$ QUESTA È

L'ORIENTAZIONE POSITIVA ∂D^+ DI ∂D .

$\Rightarrow [(\dots \downarrow \varphi(y) v_i \dots)]$ DEF. UN'ORIENTAZIONE DI ∂N

CIOE' SE N E' ORIENTABILE $\Rightarrow \partial N$ E' ORIENT.

E UN'ORIENTAZ. DI N NE INDUCE UNA DI ∂N

TEO: M k -SUP. C^1 IN $\mathbb{R}^n$ ORIENTATA
 (STOKES) $\omega \in \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ FORMA DIFF. C^1

$$\Rightarrow \int_M d\omega = \int_{\partial N} \omega$$

DIN (TRACCIA)

SE $M = \varphi(D)$

TEOR. DIV. IN $\mathbb{R}^k$

$$\int_{\varphi(D)} d\omega = \int_D d\omega^\# \stackrel{\text{red arrow}}{=} \int_{\partial D} \omega^\# = \int_{\partial N} \omega.$$

5/4/2023



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0$$

ORDINE $k \in \mathbb{N}$

FORMA IMPLICITA

$$F: I \times (\mathbb{R}^n)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{CONTINUA}$$

$$I \subseteq \mathbb{R} \quad y: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{FUNZIONE INCOGNITA}$$

IN CERTI CASI SI PUÒ SCRIVERE

$$y^{(k)}(x) = \tilde{F}(x, y, \dots, y^{(k-1)}(x))$$

FORMA ESPlicita

COL CAMBIO DI VARIABILE

$$Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^{nK}$$

POSSO SCRIVERE L'EQUAZIONE CONE

$$Y' = f(x, Y) \quad \text{PER UN'OPPORTUNA } f \text{ CONTINUA}$$

↳ PRIMO ORDINE

DOMANDA: SOTTO QUALI IPOTESI
ESISTONO SOLUZIONI?
SONO UNICHE?

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, y_0) \in I \times A$$

→ DATO INIZIALE

PER SEMPLICITÀ SUPP. $I = (x_0 - a, x_0 + a)$, $A = B_r(y_0)$
 $a > 0$, $r > 0$

TEOREMA (CAUCHY-LIPSCHITZ, ESIST. E UNICITÀ LOCALE)

SUPP. f CONTINUA, LIMITATA E

UNIF. LIPSCHITZIANA IN y

$C_{10} \in \exists L \geq 0 \quad \text{T.C.}$

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq L |y_1 - y_2|$$
$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in I_a \times B_r(y_0)$$

$$\Rightarrow \exists \delta \in (0, a] \text{ e } \underline{\exists!} y \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n), \quad I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

SOLUZIONE DEL PB. DI CAUCHY.

OSS: (FORMULAZIONE INTEGRALE)

INTEGRANDO $y' = f(x, y)$ OTTENIAMO

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$



$y(x)$ È SOL. DEL PR. DI CAUCHY $(\Leftrightarrow)$ RISOLVE



PER RISOLVERE  BASTA SUPPORRE y CONTINUA,
LA SOL. È AUTOMATICAMENTE C^1 .

Din: CERCHIANO UNA SOL. CONTINUA DI $\otimes$,
UTILIZZANDO IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

$$(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \quad I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

SPAZIO DI BANACH

$$X_{\delta,r} = \left\{ y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) : y(x) \in \overline{B_r(y_0)} \quad \forall x \in I_\delta \right\}$$

SOTT. CHIUSO DI $C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \Rightarrow X_{\delta,r}$ È METRICO
E COMPLETO

$$\text{PER } y \in X_{\delta,r} \text{ DEF. } \bar{F}(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$F: X_{\delta,r} \rightarrow C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$$

$$y \text{ è sol. di } \textcircled{x} \Leftrightarrow y = F(y)$$

DEVO VEDERE CHE F È UNA CONTRAZ. SU $X_{\delta,r}$,

CIÒ È:

$$\textcircled{1} F(y) \in X_{\delta,r} \quad \forall y \in X_{\delta,r}$$

$$\textcircled{2} \exists C \in (0, 1) \text{ t.c.}$$

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty \leq C \|y_1 - y_2\|_\infty \quad \forall y_1, y_2 \in X_{\delta,r}$$

SE SONO VERIFICATE ① e ② $\Rightarrow$

$\exists$! SOL. y PER IL TEO DELLE CONTRAZIONI.

① DEVO VEDERE $|F(y)(x) - y_0| \leq r \quad \forall x \in I_\delta$

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M \cdot \delta \leq r$$

$$M = \max_{I_\delta \times \overline{B_r(y_0)}} |f(t, y)|$$

$$\text{SE } \delta \leq \frac{r}{M}$$

$$(2) \quad \left| F(y_1)(x) - F(y_2)(x) \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt$$

$$\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq L \cdot \delta \|y_1 - y_2\|_{\infty} < \|y_1 - y_2\|_{\infty}$$

$\delta < \frac{1}{L}$

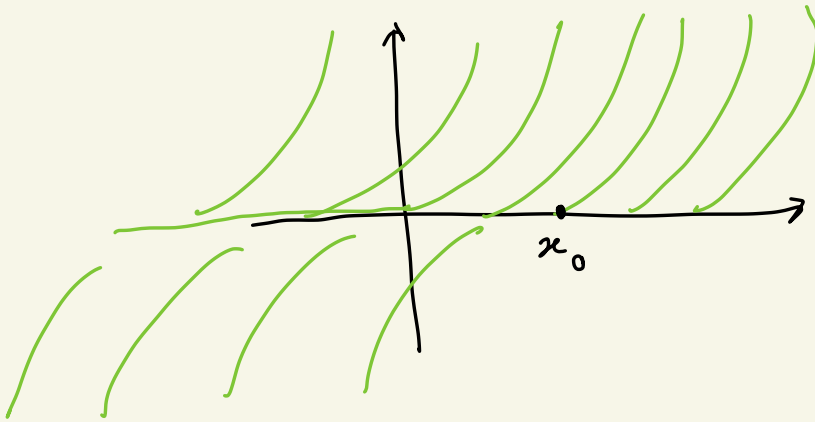
$$\Rightarrow \exists \delta \leq \min \left(a, \frac{r}{M}, \frac{1}{L} \right) \quad \exists! \text{ sol. } y \text{ def. PB. DI Cauchy}$$

OSS: SENZA LA LIPSCH. DI f NON C'È UNICITÀ

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = 0 \quad \text{È SOL.}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{4} & x \geq x_0 > 0 \end{cases} \quad \text{È SOL.}$$



BUFFO
DI PIANO

SOLUZIONE MASSIMALE

$y : I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ SOL. DEL. PB. DI CAUCHY

SUPP. $\delta < \alpha$. $y \in M$ -LIPSCHITZIANA

$$|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq M = \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm \delta} y(x) = y^\pm$$

$$\text{SE } y^\pm \in B_r(y_0), \text{ MOE' } |y^\pm - y_0| < r \Rightarrow$$

POSSO RIAPPLICARE IL TEOR. ED ESTENDERE LO SOL.

$$\text{IN } (x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta') \text{ CON } \delta' > 0$$

È LO STESSO SE $y \in B_r(y_0)$.

IN QUESTO NODO DEFINISCO UNA

SOLUZIONE MASSIMALE DEL PB. DI CAUCHY

$$y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow B_r(y_0) \quad \text{T.C.}$$

$$\textcircled{1} \quad \delta_2 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} y(x) \in \partial B_r(y_0)$$

$$\textcircled{2} \quad \delta_1 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} y(x) \in \partial B_r(y_0)$$

IN PARTICOLARE, SE $a = r = +\infty$,

$$\text{cioè } \text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$$\delta_{1,2} < +\infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x_0 + \delta_{1,2}} |y(x)| = +\infty$$

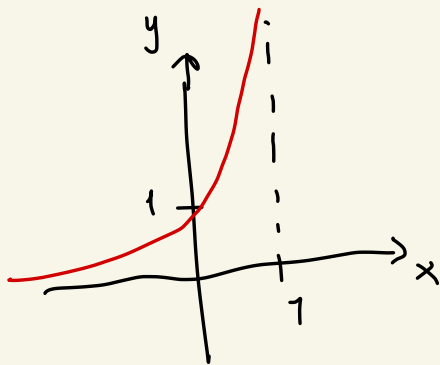
(TEOREMA DELL'ASINTOTO
FUGA DAI COMPATTI)

ES:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$x \in (-\infty, 1)$$



$$\delta_1 = +\infty$$

$$\delta_2 = 1$$

TEOREMA (PEANO)

SE f È SOLO CONTINUA $\Rightarrow \exists \delta \geq \min(a, \frac{r}{M})$

ED $\exists$ UNA SOL. $y: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ DEL PB. DI C.

DIN. APPROSSIMO f CON f_k K -LIPSCIZ. $K \in \mathbb{N}$

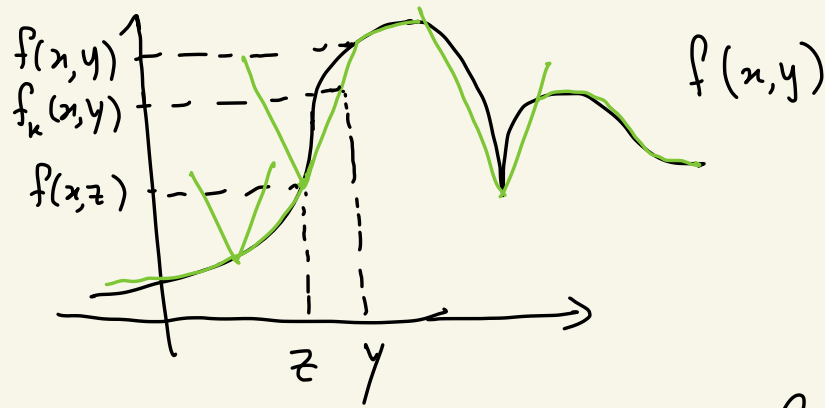
$$\text{ES: } f_k(x, y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{ f(x, z) + K |z - y| \}$$

INF-CONVOLUTIONE

.) $(x, y) \rightarrow f(x, z) + K |z - y|$ È K -LIP. IN $y \quad \forall z$
 $\Rightarrow f_k(x, y)$ È K -LIP

$$\sup_k f_k \leq f_{k+1} \leq f \quad \text{e} \quad \lim_k f_k(x, y) = \sup_k f_k(x, y) = f$$

INOLTRE $f_k \rightarrow f$ UNIF., CIOE' $\|f - f_k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$



x FISSATO

APPLICO IL TEQ PRECEDENTE CON f_k
E OTTENGO UNA SOL. MASSIMALE $y_k: I_g \rightarrow B_r(y_0)$

DEL. PB.
$$\begin{cases} y' = f_k(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

OSSERVIAMO CHE y_k È M -LIPSCHITZ.

QUINDI LE y_k SONO EQUICONT. ED EQUILIBRATE

$\Rightarrow$ PER IL TEO DI ASCOLI-ARZELÀ

$\exists$ SOTTOSUCCE. k_n T. C. $y_{k_n} \rightarrow y \in C(I_\delta, \overline{B_r(y_0)})$

UNIF.

$$\Rightarrow y(x) = \lim_n y_{k_n}(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^x f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_n f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Cioè y è SOL. DEL PB. DI CAUCHY.

TEO (ESIST. GLOBALE) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONT.

$$|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

$\Rightarrow$ OGNI SOL. MASSIMALE DEL PB. DI CAUCHY
 È GLOBALE, cioè È DEF. SU TUTTO $\mathbb{R}$

DIN. sia $y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sol. MASSIMALE

$\in \text{SUPP.}$ $\times$ ASSURDO $\delta_2 < +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} |y(x)| = +\infty$$

$$\text{sia } z(x) = |y(x)|$$

possiamo $\text{SUPP. } z > 0 \Rightarrow$

$$z'(x) = \frac{y'(x) \cdot y(x)}{|y(x)|} \leq |f(x, y(x))| \leq a(x) \cdot z(x) + b(x)$$

$$z(x) \leq \tilde{z}(x) \quad \text{DOVE } \tilde{z}(x) \text{ RISOLVE } \begin{cases} \tilde{z}' = a\tilde{z} + b \\ \tilde{z}(x_0) = z(x_0) = |y_0| \end{cases}$$

$$\Delta(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

$$\left(e^{-\Delta} \tilde{z} \right)' = e^{-\Delta} \left(\tilde{z}' - a \tilde{z} \right) = e^{-\Delta} b$$

$$e^{-\Delta(x)} \tilde{z}(x) - \tilde{z}(x_0) = \int_{x_0}^x e^{-\Delta(t)} b(t) dt$$

$$z(x) \leq \tilde{z}(x) = e^{\Delta(x)} |y_0| + \int_{x_0}^x e^{\Delta(x) - \Delta(t)} b(t) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} z(x) \leq e^{\Delta(x_0 + \delta_2)} |y_0| + \int_{x_0}^{x_0 + \delta_2} e^{\Delta(x) - \Delta(t)} b(t) dt \in \mathbb{R}$$

ASSURDO



DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PB DI CAUCHY

PROPOSIZIONE

f CONT. E L -LIPSCHITZ IN y

$y(x) = \Phi(x_0, y_0)(x)$ SOLUZIONE DEL PB DI CAUCHY

$\Rightarrow \Phi$ È LIPSCHITZIANA IN y_0 E SI HA

$$L \cdot |x - x_0|$$

$$|\Phi(x_0, y_0)(x) - \Phi(x_0, y_1)(x)| \leq |y_0 - y_1| e$$

Dim.

poniamo $y_i(x) = \phi(x_0, y_i)(x)$, $i \in \{0, 1\}$

$$w(x) = |y_0(x) - y_1(x)| \quad \text{LIPSCHITZIANA IN } x$$

$$w'(x) = \frac{y_0'(x) - y_1'(x)}{|y_0(x) - y_1(x)|} \cdot [y_0'(x) - y_1'(x)]$$

[se $y_0(x) \neq y_1(x)$]

$$w'(x) \leq |y_0'(x) - y_1'(x)| = |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))|$$

$$\leq L |y_0(x) - y_1(x)| = L \cdot w$$

LA SOL. DI $z' = Lz$ È $z(x) = z_0 e^{L(x-x_0)}$

PER CONFRONTO $w(x) \leq |y_0 - y_1| e^{L(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0$

LA STIMA PER $x < x_0$ SI FA SCAMBIANDO x CON $-x$.

SISTEMI LINEARI

$$y'(x) = A(x) y(x) + b(x)$$

$$x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$A: I \rightarrow M_{n,n} \text{ CONTINUA}$$

$$b: I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad "$$

OSS: LE SOLUZIONI ESISTO GLOBALMENTE ($\forall x \in I$)
E SONO UNICHE

SE $A(x) \equiv A$ IL SISTEMA SI DICE A COEFF. COSTANTI

SE $b(x) = 0$ " " " OMOGENEO

PROP

LE SOLUZIONI FORMANO UNO
SPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE n .

IN PARTICOLARE, LE SOL. DEL SIST. OMOGENEO

$y' = A(x) \cdot y$ SONO UNO SP. VETT. DI DIM. n

E TUTTE UNA SOL. DI $y' = A(x)y + b$

SI SCRIVE CONE

$$y(x) = y_p(x) + y_\sigma(x) \quad \text{DOVE}$$

$y_\sigma(x)$ È UNA SOL. DI $y' = A(x)y$ E $y_p(x)$ È UNA

SOLUZIONE PARTICOLARE DEL SISTEMA.

DIN. ① CONSIDERIAMO
$$\begin{cases} y' = A(x) \cdot y \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\Phi(x_0, y_0)(x)$ SOLUZIONE

$y_0 \rightarrow \Phi(x_0, y_0)(x)$ LINEARE
BIGETTIVA (PER L'UNICITÀ)

$\Rightarrow$ LO SPAZIO DELLE SOL. HA DIN. n

② SIANO ORA y_1, y_2 SOL. DI $y' = A(x)y + b(x)$

$\in w = y_1 - y_2 \Rightarrow w'(x) = A(x)y_1(x) + b - A(x)y_2 + b = A(x)w$
 $w \in \text{sol. di } w' = Aw.$

LA SOL. GENERALE DI $y' = Ay + b$ SI PUO' SCRIVERE

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \quad c_i \in \mathbb{R}$$

DOVE y_p E' UNA SOL. PARTICOLARE

E $\{y_i\}_i$ SONO UNA BASE DI SOL. DI $y' = A(x)y$.

OSS4 LE EQ. LINEARI DI ORDINE K

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) + b \quad \text{SI POSSONO SCRIVERE}$$

COME SISTEMI DEL PRIMO ORDINE, PONENDO

$$Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

$$\Rightarrow Y' = AY + B \quad \text{con}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \quad B(x) = (0, \dots, 0, b(x))$$

CASO LINEARE OMOGENEO A COEFF. COSTANTI

$$y' = Ay$$

$$A \in M_{n,n} \text{ FISSATA}$$

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ESPOENZIALE DI MATRICI

DATA $A \in M_{n,n}$ DEFINIAMO

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in M_{n,n}$$

SULLE MATRICI CONSIDERIAMO LA NORMA

$$\|A\| = \max_{|x| \leq 1} |A \cdot x|$$

OSS: LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ È ASSOLUTAMENTE

CONVERGENTE

$$\|e^A\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < +\infty$$

SE CONSIDERIAMO LE FUNZIONI

$$f_N(A) = \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} : M_{n,n} \rightarrow M_{n,n} \text{ SONO}$$

UNIF. CONVERGENTI A e^A , PER $N \rightarrow +\infty$, SUI COMPATTI DI $M_{n,n}$.

PROPRIETÀ DI e^A

① SE $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

[ALTRIMENTI NON È SEMPRE VERO]

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k B^{n-k}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k! (n-k)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$$

② $e^A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Id} + \frac{A}{n} \right)^n$ "SI FA CONF PER e^x "

$$\textcircled{3} \quad \det(e^A) = e^{\text{tr} A} > 0$$

IN PART. e^A È SEMPRE INVERTIBILE

$$\text{E} \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

USANDO $\textcircled{2}$ SI HA

$\lambda_i \in \mathbb{C}$
AUTOVALORI DI A

$$\det(e^A) = \lim_N \det \left(\text{Id} + \frac{A}{N} \right)^N =$$

$$\begin{aligned} \lim_N \left[\det \left(\text{Id} + \frac{A}{N} \right) \right]^N &= \lim_N \left[\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\lambda_i}{N} \right) \right]^N \\ &= \lim_N \left[1 + \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \right]^N = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{tr} A} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad M \text{ INVERTIBILE} \Rightarrow e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M$$

$$\text{INFATTI} \quad e^{M^{-1}AM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{-1}A^k M}{k!} = M^{-1}e^A M$$

COME SI CALCOLA e^A ?

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{DIAGONALE}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = B + C \quad B = \lambda I \quad e^B = e^\lambda I$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^A = e^B \cdot e^C = e^\lambda \cdot e^C$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^C = \sum \frac{C^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{k!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{k!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{k!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{k!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

TEOREMA

LA FUNZIONE $x \rightarrow e^{Ax}$ È DIFFERENZIABILE $\forall x \in \mathbb{R}$

E SI HA $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}$.

COR. L'UNICA SOL. DI $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ È

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0$$

DIM. $\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} =$

$$e^{\Delta x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta h} - \text{Id}}{h} =$$

$$e^{\Delta x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} - \text{Id}}{h} =$$

$$e^{\Delta x} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!} = e^{\Delta x} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) =$$

$$A \cdot e^{\Delta x} \cdot \left(\text{Id} + \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+1} h^j}{(j+2)!} \right) = A e^{\Delta x}$$

↳ SERIE ASSOL. CONVERGENTE

Caso $n=2$

$$y' = Ay$$

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ AUTOVALORI DI A

① $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

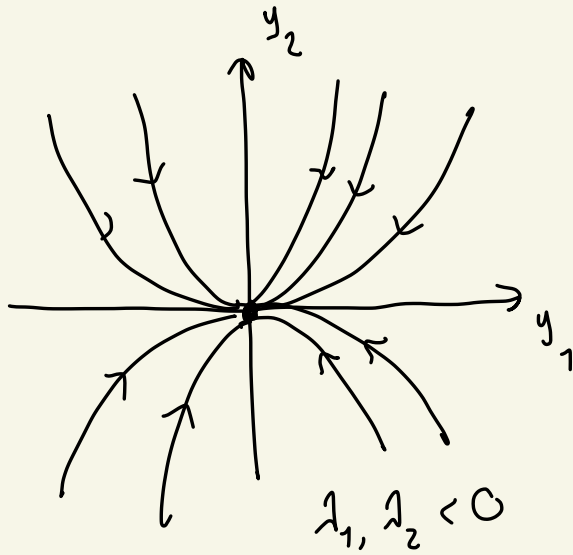
$$e^{At} = P \cdot e^{P^{-1}APt} \cdot P^{-1}$$

$$e^{P^{-1}APt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

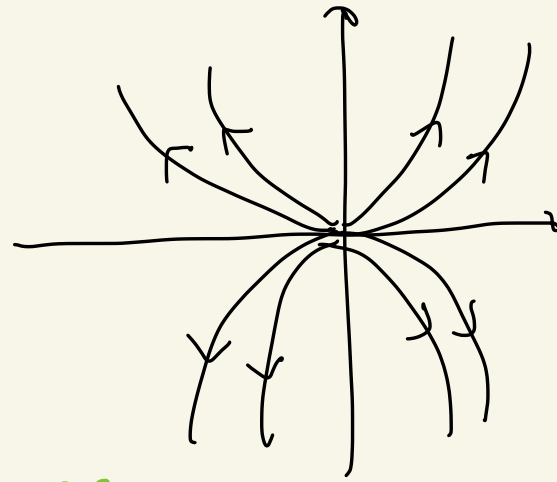
LA SOL. DI $y' = (P^{-1}AP)y$

$$\text{E' } y(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} & c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

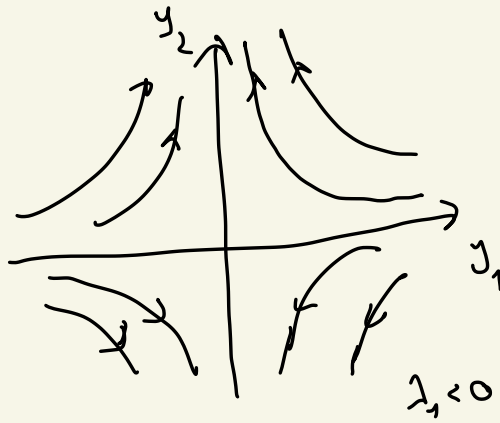
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$



NODO STABILE



NODO
INSTABILE



SELLA

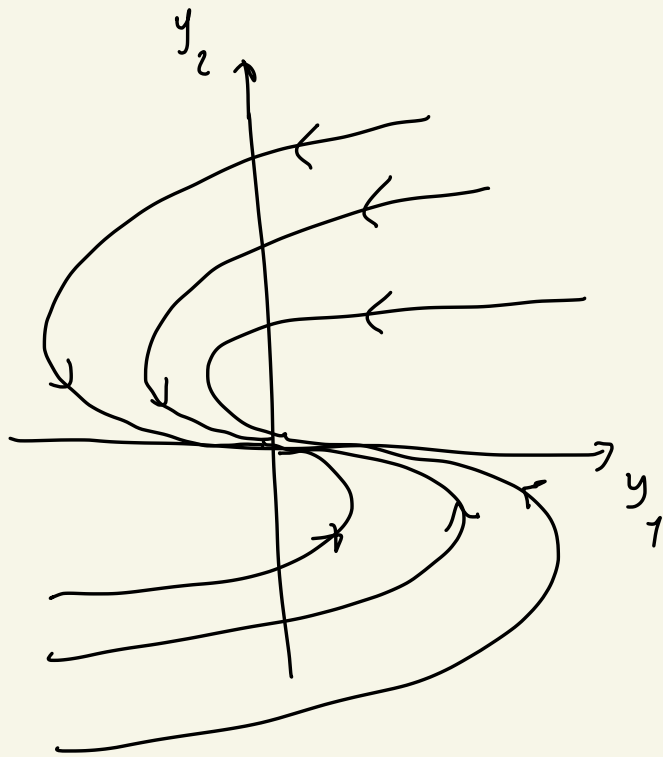
$$\textcircled{2} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y' = (P^{-1}AP)y \rightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \rightarrow y_2 = c_2 e^{\lambda x}$$

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

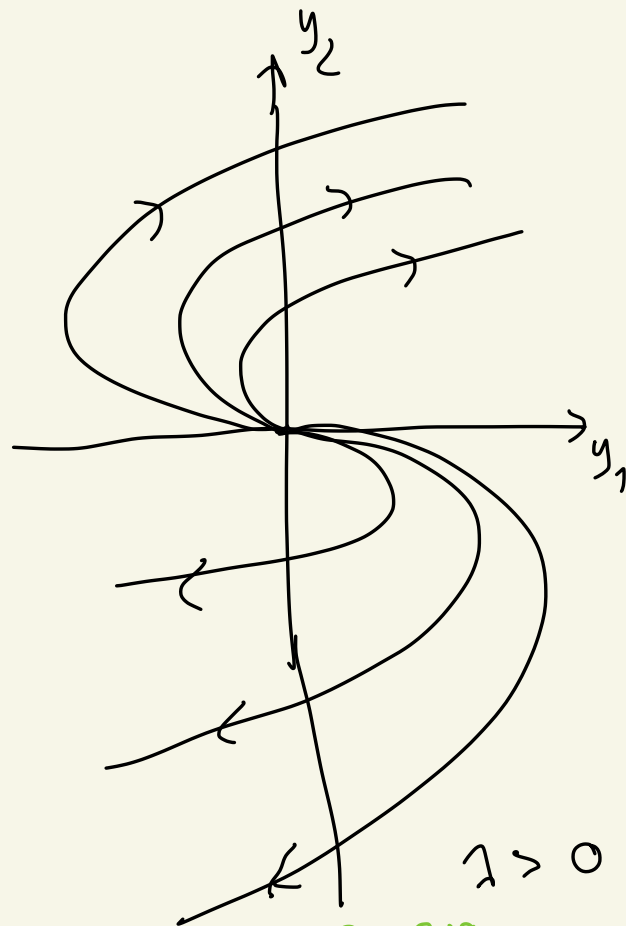
$$\left[\begin{array}{l} y_1' = \lambda (c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}) + c_2 e^{\lambda x} \\ \quad = \lambda y_1 + y_2 \end{array} \right]$$

$$y(x) = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x, c_2)$$



$$\lambda < 0$$

NODO IMPROPRIO
STABILE



$$\lambda > 0$$

NODO IMPROPRIO
INSTABILE

$$\textcircled{3} \quad \lambda_1 = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

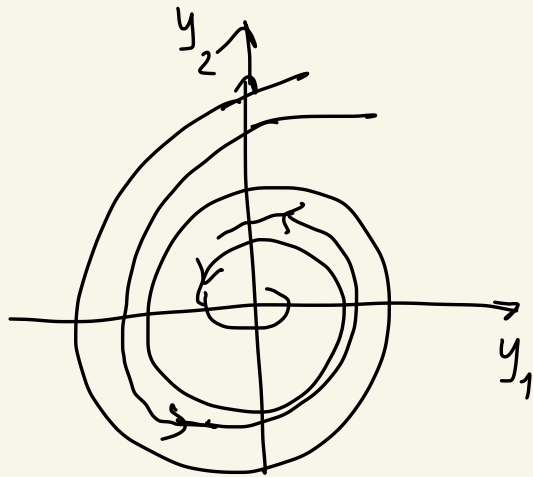
$$e^{P^{-1}AP} = e^{\alpha} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

↑
VERIFICARE

↳ ROTAZIONE DI
ANGOLO β

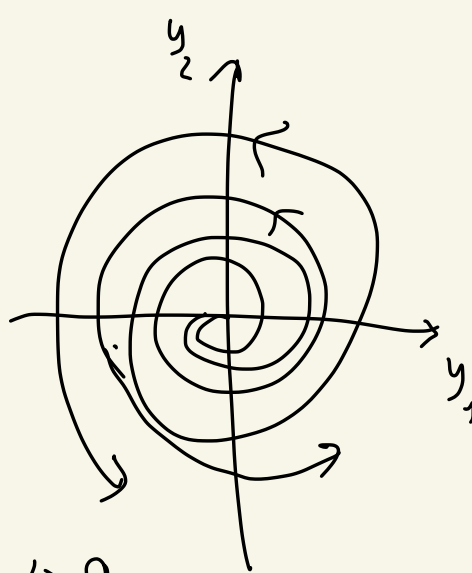
$$y' = (P^{-1}AP)y \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x), -c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) \end{pmatrix}$$



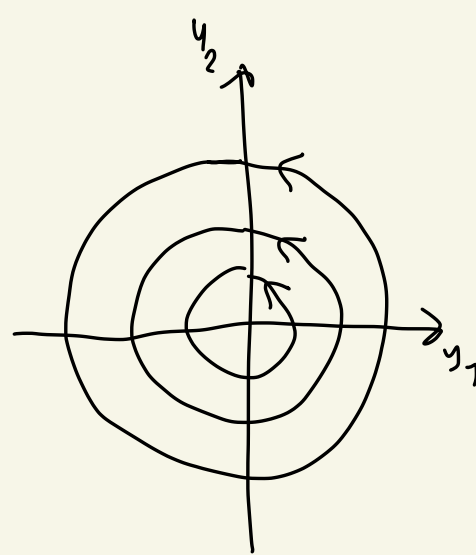
$$\alpha < 0$$

FUOCO STABILE



$$\alpha > 0$$

FUOCO INSTABILE



$$\alpha = 0$$

CENTRO

SISTEMI NON OMOGENEI A COEFF. COSTANTI

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ cont.}$$

$$A \in M_{n,n}$$

IN ANALOGIA CON LE EQ. DEL PRIMO ORDINE

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0 + e^{Ax} \cdot \underbrace{\int_{x_0}^x e^{-As} \cdot b(s) ds}_{y_p(x)}$$

SOL. PARTICOLARE
CON $y_p(x_0) = 0$

VERIFICHIAMO CHE y_p È SOL.:

$$y_p' = A e^{\Delta x} \int_{x_0}^x e^{-\Delta s} \cdot b(s) ds + \cancel{e^{\Delta x}} \cdot \cancel{e^{-\Delta x}} b(x) = A y_p + b$$

SISTEMI NON LINEARI AUTONOMI

$$y' = f(y) \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f \in C^1(A)$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ APERTO}$$

IL SISTEMA SI DICE AUTONOMO QUANDO

f DIPENDE SOLO DA y

y_0 T.C. $f(y_0) = 0$ SI DICE PUNTO STAZIONARIO
DEL SISTEMA $\left(y(x) \equiv y_0 \text{ È UNA SOLUZIONE} \right)$

OSS: GENERICAMENTE, IL SISTEMA $y' = f(y)$,
VICINO A y_0 , SI COMPORTA COME IL
SISTEMA LINEARIZZATO $z' = Df(y_0)z$
(DOVE PONIAMO $z(x) = y(x) - y_0$)

TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE (HARTMAN - GROBMANN)

$$f \in C^1(A) \quad y_0 \in A \quad f(y_0) = 0$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \text{ AUTOVALORE DI } Df(y_0)$$

$$\Rightarrow \exists U \text{ INT. DI } y_0 \text{ E } \Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ OMEOMORFISMO}$$

T.C. $\Phi(y_0) = 0 \in$, DETTA $y(x, y_1)$ LA SOL. DI $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases}$,

$z(x_0, z_0) := \Phi(y(x, \Phi^{-1}(z_0)))$ RISOLVE IL

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\begin{cases} z' = Df(y_0) z \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

OSS: y_0 T.C. $\operatorname{Re}(1) \neq 0 \quad \forall \lambda$ SI DICE

PUNTO STAZIONARIO IPERBOLICO

OSS: IN GENERALE Φ È HÖLDER MA NON C^1 ,
CIOÈ NON È UN DIFFEOMORFISMO

ESEMPIO:

$n=2$

$$y = (y_1, y_2)$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1 (y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2 (y_1^2 + y_2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = f(y)$$

PUNTI STAB.

$$\begin{cases} y_1 (1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2 \\ y_2 (1 - (y_1^2 + y_2^2)) = -y_1 \end{cases}$$

$$y_1 y_2 (1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2^2 = -y_1^2 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0$$

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SIST. LINEARIZZATO

$$\begin{cases} z_1' = z_1 - z_2 \\ z_2' = z_1 + z_2 \end{cases}$$

AUTIVALORI

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

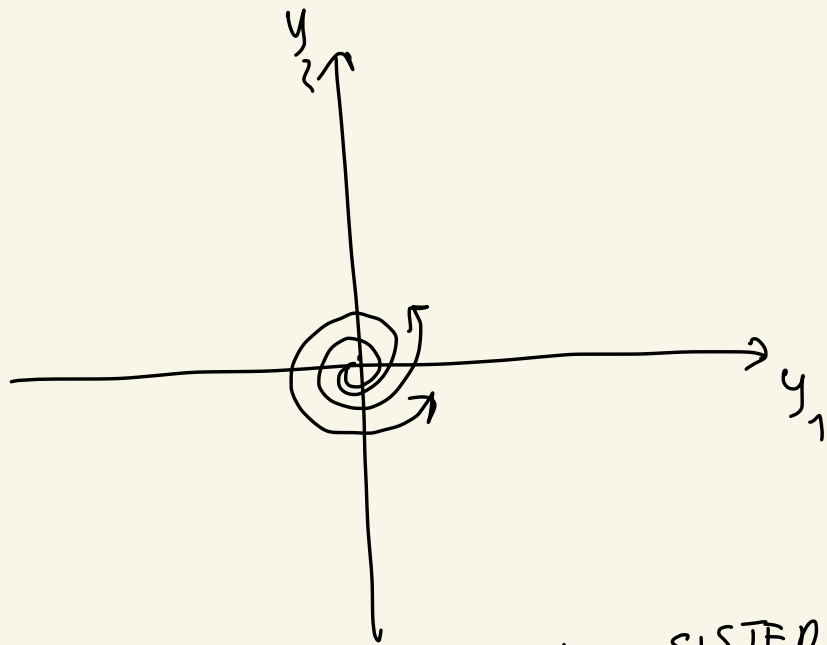
$$\lambda_1 = 1+i$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-i$$

FUOCO INSTABILE

POSSIAMO APPLICARE IL

TEO DI LINEARIZZAZIONE

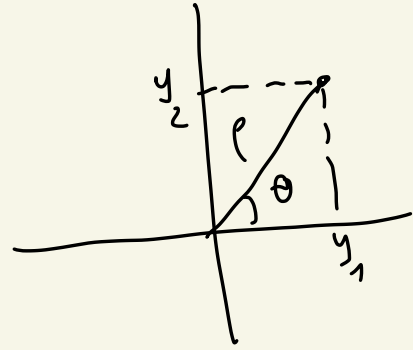


COME SI COMPORTA IL SISTEMA LONTANO DA $(0,0)$?

PASSIAMO A COORDINATE POLARI

$$(y_1, y_2) \rightarrow (r, \theta)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} r' = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{r} \\ \theta' = \frac{1}{1 + \frac{y_2^2}{y_1^2}} \cdot \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} \end{cases}$$

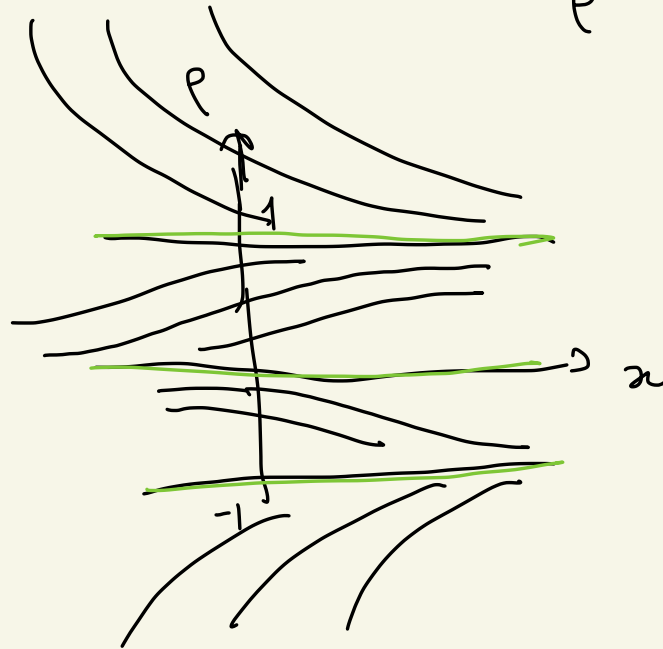
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1 (y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2 (y_1^2 + y_2^2) \end{cases}$$

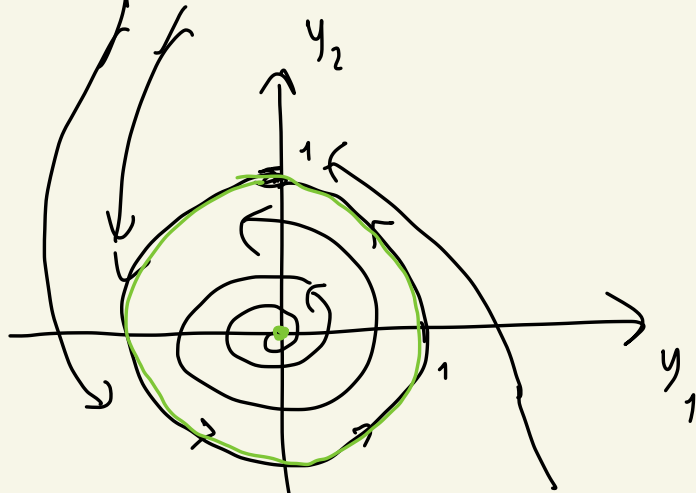
$$\left\{ \begin{aligned} \rho' &= \frac{y_1^2 - y_1 y_{12} - y_1^2 \rho^2 + y_1 y_{12} + y_2^2 - y_2^2 \rho^2}{\rho} = \frac{\rho^2 - \rho^4}{\rho} = \rho - \rho^3 \\ \theta' &= \frac{y_1^2 + y_1 y_{12} - y_1 y_{12} \rho^2 - y_1 y_{12} + y_2^2 + y_1 y_{12} \rho^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\theta(x) = \theta_0 + x$$

$$\rho' = \rho - \rho^3$$

$\rho(x) = 1$ È SOLUZIONE
STABILE





$(p, \theta) = (1, \pi)$ È UN'ORBITA PERIODICA DEL SISTEMA

TEOREMA (POINCARÉ - BENDIXSON)

$n=2$ $y' = f(y)$ $f \in C^1(\Lambda)$ $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO

SUPPONIAMO CHE :

① $\exists K \subseteq \Lambda$ compatto INVARIANTE, cioè
 $y(x_0) \in K \Rightarrow y(x) \in K \quad \forall x > x_0$

② $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in K$

$\Rightarrow \exists$ SOLUZIONE PERIODICA IN K .



SISTEMI LINEARI (NON AUTONOMI)

$$y' = A(x)y + b(x)$$

A, b continue su $I \subseteq \mathbb{R}$

CASO OMOGENEO

$$y' = A(x)y$$

LE SOL. SONO UNO SP. VETTORIALE DI DIM. n

$y_1, \dots, y_n$ sono INDIP. $(\Rightarrow)$ $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ sono INDIP.
in $C(I, \mathbb{R}^n)$ $\forall x_0 \in I$

DATE n SOLUTIONI

$y_1 \dots y_n$ LA MATRICE

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

SI DICE MATRICE WRONSKIANA

$w(x) = \det W(x)$ SI DICE DETERMINANTE WRONSKIANO

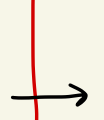
W, w VERIFICANO

$$W'(x) = A(x) W(x)$$



SEGUE SUBITO DA $y_k' = A(x) y_k \quad \forall k$

$$w'(x) = [\text{tr} A(x)] w(x)$$



equazione del 1° ordine scalare

$$w(x) = w(x_0) e^{F(x)}$$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \text{tr}(A(s)) ds$$



$w(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in I \Rightarrow w(x) \equiv 0$

$w \equiv 0 \quad (\Rightarrow) \quad y_1, \dots, y_n \text{ SONO DIPENDENTI.}$

VERIFICHIAMO CHE $w' = (\text{tr } A)w$:

$$w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det W(x+h) - \det W(x)}{h}$$

$$W(x+h) = W(x) + h W'(x) + o(h) = (I + hA)W + o(h)$$

$$\det [W(x+h)] = \det [(I + hA)W] + o(h) = \det (I + hA) w + o(h)$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 + h\lambda_i) \cdot w + o(h) = [1 + h \text{tr}(A)] w + o(h)$$

(λ_i AUTOVAL DI A)

$$\Rightarrow w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + h \operatorname{tr}(\Delta)]w - w + o(h)}{h} = \operatorname{tr}(\Delta) \cdot w.$$

CASO NON OMOGENEO

$$y' = A(x)y + b(x)$$

$y_1, \dots, y_n$ SOL. DI $y' = Ay$

y_p È UNA SOL. PARTICOLARE

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + y_p$$

$c_i \in \mathbb{R}$

COME NEL CASO AUTOMOMO, DATA UNA MATRICE WRONSKIANA W ,

$$\text{CON } \det W \neq 0 \Rightarrow y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) \, ds \quad \text{È LA SOL. (PART.)}$$

CHE VERIFICA $y_p(x_0) = 0$

INFATTI

$$y_p'(x) = W'(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) + b(x)$$

$$= A W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) + b(x) = A y_p(x) + b(x)$$

QUALCHE ESEMPIO DI SISTEMI NON LINEARI

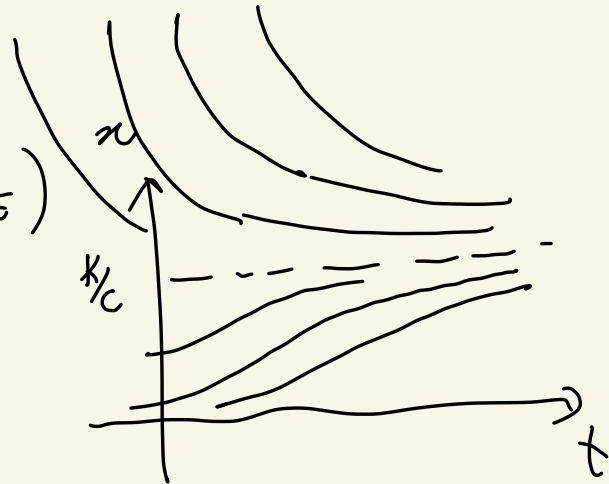
① MODELLI DI DINAMICA DI POPOLAZIONI

1 POPOLAZIONE $x(t)$ = # individui al tempo t

$$x'(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{CRESCITA}}}{K} x(t) - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{COMPETIZIONE}}}{c} x^2(t)$$

$$K, c > 0$$

$x \equiv 0$ SOL. $x \equiv \frac{K}{c}$ SOL. (STABILE)



2 popolazioni $x(t)$ $y(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = (K_1 - a_{11}x - a_{12}y)x \\ y'(t) = (K_2 - a_{21}x - a_{22}y)y \end{cases}$$

COEFF. TUTTI > 0

CI INTERESSA $x \geq 0, y \geq 0$

$$x' = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{K_1}{a_{12}} \quad (R_1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{K_2}{a_{22}} \quad (R_2)$$

CASO 1

R_1, R_2 NON SI INTERSECAVO NEL I QUADR.

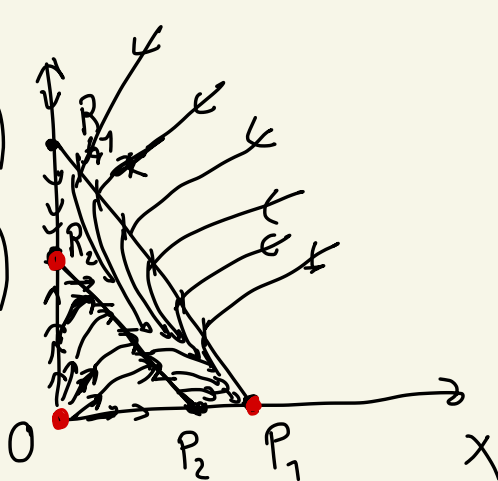
" $R_1 > R_2$ "

$$P_1 = \left(\frac{K_1}{a_{11}}, 0 \right)$$

$$P_2 = \left(\frac{K_2}{a_{21}}, 0 \right)$$

$$Q_1 = \left(0, \frac{K_1}{a_{12}} \right)$$

$$Q_2 = \left(0, \frac{K_2}{a_{22}} \right)$$



$$\frac{K_2}{a_{22}} < \frac{K_1}{a_{12}}$$

$$\frac{K_2}{a_{21}} < \frac{K_1}{a_{11}}$$

$0, Q_2 \in P_1$ SONO PUNTI STAZIONARI

VEDIAMO LA STABILITÀ DEI PT. STAZIONARI

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} K_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & K_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$J(0) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \quad \text{NODO INSTABILE}$$

$$J(Q_2) = \begin{pmatrix} K_1 - \frac{a_{12}K_2}{a_{22}} & 0 \\ -\frac{a_{21}K_2}{a_{22}} & -K_2 \end{pmatrix} \quad \text{SELLO}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -K_1 & -\frac{a_{12} K_1}{a_{11}} \\ 0 & K_2 - \frac{a_{21} K_1}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} K_1 \\ \frac{K_1}{a_{11}}, 0 \end{pmatrix}$$

< 0

NODO (IMPROPRIO)

STABILE

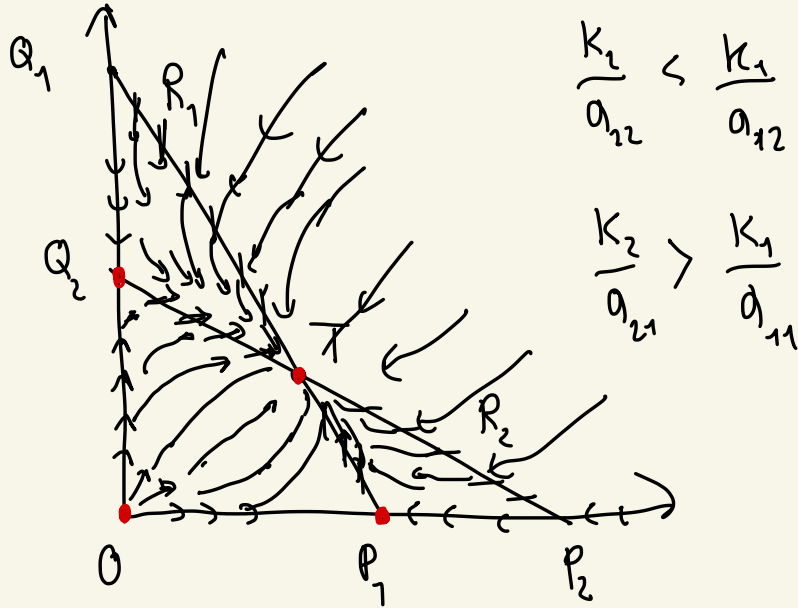
IL CASO " $R_2 > R_1$ " SI FA ANALOGAMENTE

SE $x(t_0) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ CIOE' SUPRAVVIVE SOLO x

CASO 2

PUNTI STAZ:

O, P_1, Q_2, T

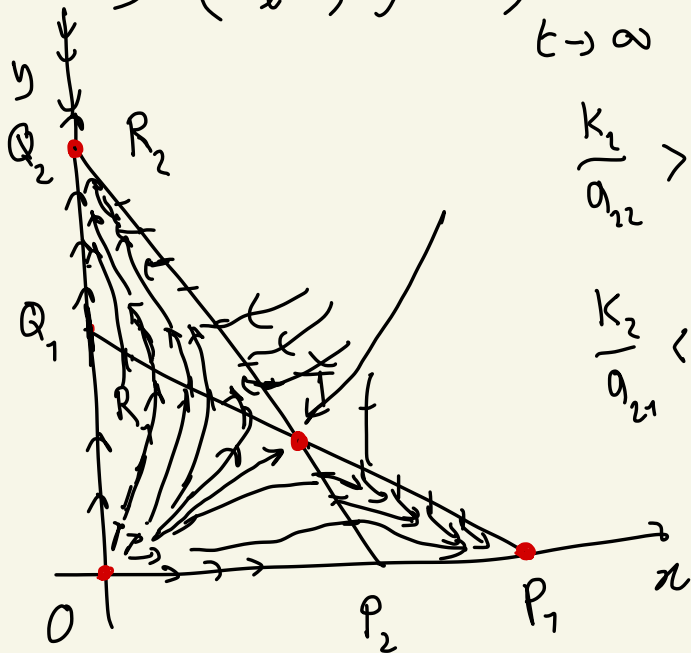


$$J(O) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{NODO INST.}$$

C1 ASPETTIAMO: Q_2, P_1 SELLE e T NODO STABILE
(VERIFICARE)

SE $x(t_0) > 0$ e $y(t_0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \rightarrow T$
 $t \rightarrow \infty$

CASO 3



$$\frac{k_1}{a_{12}} > \frac{k_1}{a_{12}}$$

$$\frac{k_2}{a_{21}} < \frac{k_1}{a_{11}}$$

CI ASPETTIAMO

P_1, Q_2 NODI STABILI E T SELLA

(VERIFICARE)

GENERICAMENTE $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ o $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

MODELLO PREDA-PREDATORE (VOLTERRA - LOTKA)

$x(t)$ PREDE

$y(t)$ PREDATORI

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy - \varepsilon x^2 \\ y'(t) = -cy + dxy - \delta y^2 \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0$$

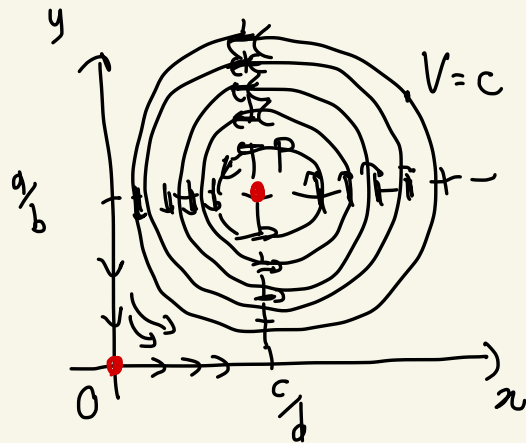
$$\delta, \varepsilon \geq 0$$

PONIAMO $\varepsilon = \delta = 0$

$$x' = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0 \quad \text{or} \quad y = \frac{a}{b}$$

$$y' = 0 \quad (\Rightarrow) \quad y = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{c}{d}$$

$$P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$



$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

$$J(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ SELLA}$$

CI ASPETTIAMO

P CENTRO O FUOCO

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 = -ac \quad \lambda = \pm \sqrt{ac} i$$

NON VALE IL TEO DI LIN.

$V(x, y)$ È UN INTEGRALE PRIMO DEL SISTEMA

SE $V(x(t), y(t))$ È COSTANTE IN t , CIOÈ

$$0 = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla V(x, y) (x', y') =$$

$$V_x \cdot x' + V_y \cdot y' = V_x(a - by)x + V_y(-c + dx)y$$

DIVIDO PER xy

$$0 = V_x \left(\frac{a}{y} - b \right) + V_y \left(-\frac{c}{x} + d \right)$$

POSSO PROVARE A PRENDERE

$$V_x = -\frac{c}{x} + d \quad \text{e} \quad V_y = -\frac{a}{y} + b$$

$\Downarrow$

$$V = -c \log x + dx + f(y)$$

$$V = -a \log y + by + g(x)$$

$$\Rightarrow V(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y \quad \text{e' un int. primo}$$

$$V \text{ e' CONVESSA, } \lim_{x \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = +\infty$$

V HA MINIMO IN P



MISURE DI HAUSDORFF

DEF: $k \in [0, +\infty)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(E)$$

SI DICE MISURA DI HAUSDORFF k -DIM. DI E

$$\text{dove } \mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^k : \text{diam}(E_i) \leq \delta \text{ e } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

OSS:

$\omega_k \cdot \frac{\text{diam}(E_i)^k}{2^k}$ è l'area k -dim. del

disc $B_r \subseteq \mathbb{R}^k$ con $r = \frac{\text{diam}(E_i)}{2}$

$$\omega_k = |B_1| = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}$$

Formula di Eulero

OSS:

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta_1}^k(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^k(E) \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta}^k(E)$$

OSS:

SE IMPONIAMO E_i PALLA $\forall i$
OTTENIAMO $S^k(E) \geq \mathcal{H}^k(E)$

MISURA DI HAUSDORFF SFERICA

TEO

① $\mathcal{H}^k$ È UNA MISURA ESTERNA IN $\mathbb{R}^n$
E $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, CIA È $\mathcal{H}^k|_{\mathcal{M}}$ È UNA MISURA
DI BOREL

② $\mathcal{H}^0(E) = \#E$

③ $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$ È LA MISURA DI LEBESGUE

$$\textcircled{4} \quad k > k' \in \mathcal{H}^k(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(E) = +\infty$$

$$\left(\mathcal{H}^{k'}(E) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) = 0 \right)$$

IN PART. $\mathcal{H}^k(E) = 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall k > n$

$$\textcircled{5} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad C\text{-LIPSCHITZIAN}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E)) \leq C^k \mathcal{H}^k(E)$$

Dim

$$\textcircled{1} \textcircled{0} E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{H}_s^k(E) \leq \mathcal{H}_s^k(F) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) \leq \mathcal{H}^k(F)$$

UN RICOPRIMENTO E_i DI F È ANCHE RICOPR. DI E

$$\textcircled{0} F_j \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{H}_s^k(\bigcup_j F_j) \leq \sum_j \mathcal{H}_s^k(F_j)$$

$\{E_{ij}\}_i$ RICOPRIMENTO DI $F_j \Rightarrow \{E_{ij}\}_{i,j}$ È UN RICOPRIM.
DI $\bigcup_j F_j$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(\bigcup_j F_j) \leq \sum_j \mathcal{H}^k(F_j)$$

$$\odot \mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$$- \text{dist}(E, F) > 0 \quad \delta < \frac{1}{2} \text{dist}(E, F)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(E \cup F) = \mathcal{H}^k(E) + \mathcal{H}^k(F)$$

(
ADDITIVITÀ
SU INSIEMI
DISTANTI)

USANDO QUESTO SI PUÒ DIMOSTRARE

$$\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(E \cap B) + \mathcal{H}^k(E \setminus B)$$

$\forall B \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO

$$\Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \{\text{CHIUSSI in } \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

② È SUFF. VERIFICARE, PER LA MONOTONIA DI $\mathcal{H}^0$,
CHE $\mathcal{H}^0\left(\bigcup_{i=1}^N x_i\right) = N$



$$\mathcal{H}_\delta^0\left(\bigcup_{i=1}^N x_i\right) = \inf \left\{ \sum_{i \in J} \text{diam}(E_i) : \{E_i\}_{i \in J} \text{ RICOPRIMENTO DI } \bigcup_{i=1}^N x_i \right\}$$

$$= \inf \#J = N$$

SE $\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$.

③ $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$ È UNA MISURA DI BOREL INV. PER
TRASLAZIONI $\Rightarrow \mathcal{H}^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = c \cdot \mathcal{L}$

BASTA VERIFICARE CHE $\mathcal{H}^n(B_1) = |B_1| = \omega_n$
(DA VERIFICARE)

$$\textcircled{4} \quad k > k' \quad E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \delta > 0$$

$\{E_i\}$: ricoprimento di E con $\text{diam}(E_i) < \delta \quad \forall i$

$$\Rightarrow \text{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \text{diam}(E_i)^{k'}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E) < \underbrace{\frac{\omega_k}{2^k} \cdot \frac{2^{k'}}{\omega_{k'}}}_{C_{k,k'} > 0} \cdot \delta^{k-k'} \mathcal{H}_\delta^{k'}(E)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_\delta^{k'}(E) > \frac{\mathcal{H}_\delta^k(E)}{C_{k,k'} \cdot \delta^{k-k'}} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{k'}(E) > \frac{\mathcal{H}^k(E)}{C_{k,k'}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{k-k'}} = +\infty$$

⑤ f C-LIP.

$\{E_i\}_i$ ricopr. di $E \Rightarrow f(E_i)$ ricopr. di $f(E)$
 $\text{e } \text{diam}(f(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i) \forall i$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_f^k(f(E)) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(f(E_i))^k : E_i \text{ ricopr. di } E \right\}$$

$$\leq C^k \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum \text{diam}(E_i)^k : E_i \text{ " " } \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_f^k(f(E)) \leq C^k \mathcal{H}_f^k(E)$$

OSS: $\mathcal{H}^k$ non è di RADON se $k < n$

cioè non è finita sui compatti,
in particolare non è σ -finita

INTEGRAZIONE

Prendiamo $E \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ σ -finito per $\mathcal{H}^k$,

cioè $\mathcal{H}^k|_E$ è σ -finita e $f \in \mathcal{H}^k|_E$ misurabile

(ad esempio f continua o f boreliana o b.e.)

Definiamo

$$\int_E f d\mathcal{H}^k := \int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{H}^k|_E$$

ES: $\mathcal{H}^k(E) = \int_E 1 \, d\mathcal{H}^k$

TEO: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ SUP. COMPATTA C^1 $\begin{pmatrix} 0 < k < n, k \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$
 k -DIMENSIONALE

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow \Sigma$ È σ -FINITA PER $\mathcal{H}^k$

$\int_{\Sigma} f = \int_{\Sigma} f \, d\mathcal{H}^k$

DEF. CON LE PARAMETRIZZ. DI Σ

IN PART. $\int_{\Sigma} 1 = \mathcal{H}^k(\Sigma).$

DIMENSIONE DI HAUSDORFF

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf \left\{ k > 0 : \mathcal{H}^k(E) = 0 \right\} \in [0, n]$
DIM. DI HAUSDORFF DI E

OSS: PER IL TEO PRECEDENTE, SE $\Sigma \in k\text{-SUP. } C^1(k \in \mathbb{N})$,
 $\Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) = k$.

OSS: $\exists$ INSIEMI $E \subseteq \mathbb{R}^n$ T.C. $\dim_{\mathcal{H}}(E) \notin \mathbb{N}$.

ES: $C \subseteq [0, 1]$ INSIEME DI CANTOR, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ CURVA DI KOCH
(INSIEMI FRATTALI)

VEDIAMO IL CASO DI $C \subseteq [0,1]$.

C VERIFICA $C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(C) = \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) + \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) = \frac{2}{3^k} \mathcal{H}^k(C)$$

SE $\mathcal{H}^k(C) \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{2}{3^k} = 1 \Rightarrow k = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0,1)$

DEVO VERIFICARE $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \in (0, +\infty)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$



INSIEMI FRATTALI

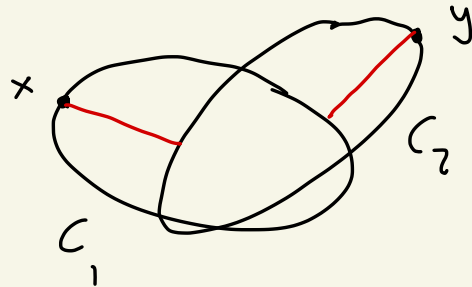
$$K(\mathbb{R}^n) = \{ K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compatto, } K \neq \emptyset \}$$

$$d_H : K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$$

DISTANZA DI HAUSDORFF

$$d_H(C_1, C_2) = \max \left(\max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{y \in C_2} d(y, C_1) \right)$$

DOVE $d(x, C) = \min_{y \in C} |x - y|$



TEO $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ è uno spazio metrico completo

DIN ① d_H è una distanza

① $d_H(C_1, C_2) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$

INFATTI $\left. \begin{array}{l} \max_x d(x, C_2) = 0 \Rightarrow C_1 \subseteq C_2 \\ \text{E } \max_y d(y, C_1) = 0 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = C_2$

② $d_H(C_1, C_2) = d_H(C_2, C_1)$

⊙ DIS. TRIANGOLARE

$$C_1, C_2, C_3 \in K(\mathbb{R}^n)$$

$$\forall x \in C_1 \quad \exists y \in C_2 \text{ t.c. } |x-y| \leq d_H(C_1, C_2)$$

$$\text{e } \exists z \in C_3 \text{ t.c. } |y-z| \leq d_H(C_2, C_3)$$

$$\Rightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3)$$

$$\Rightarrow \max_{x \in C_1} d(x, C_3) \leq \quad \quad \quad + \quad \quad "$$

$$\text{per simmetria} \quad d_H(C_1, C_3) \leq \quad \quad \quad + \quad \quad "$$

② Sia C_k succ. di Cauchy in $K(\mathbb{R}^n)$

A FINE DI SOTTOSUCC. POSSIAMO SUPPORRE $d_H(C_k, C_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow d_H(C_k, C_n) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} \quad \forall n \geq k$$

DEFINIAMO $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \exists x_k \in C_k \text{ con } x_k \rightarrow x \right\}$
(LIMITE DI KURATOWSKI DEI C_k)

DOBBIAMO VERIFICARE $C \in K(\mathbb{R}^n)$ e $d_X(C_n, C) \rightarrow 0$.

① $C \neq \emptyset$ INFATTI $d_X(C_n, C_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$$\exists x_n \in C_n \text{ t.c. } |x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow x_n \text{ di Cauchy}$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in C$$

② $\forall x \in C \exists x_n \in C_n \text{ t.c. } |x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$

INFATTI $x = \lim_n x_n$ $x_n \in C_n$ sc. E.L.G.O. $n > K$ t.c. $|x - x_n| \leq \frac{2}{2^n}$

$$d_X(C_n, C_{n-1}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \exists x_{n-1} \in C_{n-1} \text{ t.c. } |x_{n-1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \exists x_j \in C_j \quad K \leq j \leq n-1 \quad |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j}$$

$$\Rightarrow |x_k - x| \leq |x - x_n| + \sum_{j=k}^{n-1} |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{2}{2^k} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{4}{2^k}$$

$$\Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{4}{2^k} \Rightarrow \boxed{\max_{x \in C} d(x, C_k) \leq \frac{4}{2^k}}$$

⊙ Viceversa, dato $y_k \in C_k \exists x_k \in C$ t.c. $|y_k - x_k| \leq \frac{2}{2^k}$

INFATTI, COME SOPRA $\exists y_j \in C_j$ t.c. $|y_j - y_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j}$

$$\Rightarrow y_j \rightarrow x_k \in \mathbb{R}^n \text{ e } |x_k - y_k| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |y_j - y_{j+1}| = \frac{2}{2^k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{y \in C_k} d(y, C) \leq \frac{2}{2^k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(C, C_k) \leq \frac{4}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}$$

① C LIMITATO. FISSO $k \in \mathbb{N}$ CONSIDERO $n > k \Rightarrow$

$$d_H(C_n, C_k) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k}$$

$$\forall x_n \in C_n \quad d(x_n, C_k) \leq \frac{2}{2^k}$$

$$x \in C \Rightarrow x = \lim_n x_n \quad x_n \in C_n \Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{2}{2^k}$$

$$C \subseteq C_k + \overline{B}_{\frac{2}{2^k}} = \left\{ x+y : x \in C_k, y \in \overline{B}_{\frac{2}{2^k}} \right\} \text{ LIMITATO}$$

① C CHIUSO

$$x_k \in C \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x = \lim_k x_k$$

$$\text{POICHÉ } d_\mathcal{H}(C, C_k) \leq \frac{\epsilon}{2^k} \Rightarrow d(x_k, C_k) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$\Rightarrow \exists y_k \in C_k \text{ t.c. } |x_k - y_k| \leq \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$|y_k - x| \leq |x_k - x| + |x_k - y_k| \leq |x_k - x| + \frac{\epsilon}{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

$$x = \lim_k y_k \quad y_k \in C_k \Rightarrow x \in C.$$

OSS: M SP. METRICO COMPLETO $\Rightarrow (K(M), d_\mathcal{H})$ È
METRICO COMPLETO

OSS: T ISOMETRIA DI $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{T}: K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n) \quad \tilde{T}(K) = \bigcup_{x \in K} T(x)$$

È UN'ISOMETRIA, INFATTI

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \forall x \in C_1, y \in C_2$$

$$\Rightarrow d_x(\tilde{T}(C_1), \tilde{T}(C_2)) = d_x(C_1, C_2)$$

TEO $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ È UNA CONTRAZIONE, $1 \leq i \leq N$,

$$\text{cioè } |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \lambda_i |x - y| \quad \lambda_i \in (0, 1),$$

$$\Rightarrow \exists! C \in K(\mathbb{R}^n) \text{ T.C. } C = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C),$$

$$\text{DOVE } \varphi_i(C) = \bigcup_{x \in C} \varphi_i(x).$$

DIN OSSERVIAMO CHE

$$T(C) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C) \quad \text{È UNA CONTRAZIONE}$$
$$\text{IN } (K(\mathbb{R}^n), d_H).$$

INFATTI, PONIAMO $\lambda = \max_i \lambda_i \in (0, 1)$

E CONSIDERIAMO $C_1, C_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{PER } x \in T(C_1) = \bigcup_i \varphi_i(C_1)$$

$$\Rightarrow x \in \varphi_j(C_1) \text{ PER UN CERTO } j$$

$$\text{CIOE' } x = \varphi_j(\bar{x}) \quad \bar{x} \in C_1,$$

$$\exists \bar{y} \in C_2 \text{ CON } |\bar{x} - \bar{y}| \leq d_X(C_1, C_2)$$

$$\text{PONGO } y = \varphi_j(\bar{y}) \in T(C_2)$$

$$|x-y| = |\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{y})| \leq \lambda |\bar{x} - \bar{y}| \leq \lambda d_X(C_1, C_2)$$

$$\Rightarrow d(x, T(C_2)) \leq |x-y| \leq \lambda d_X(C_1, C_2)$$

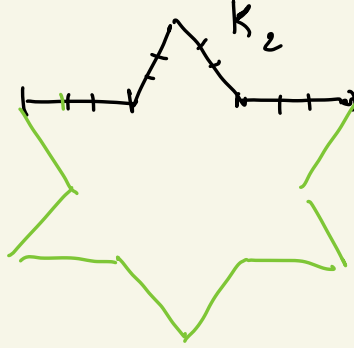
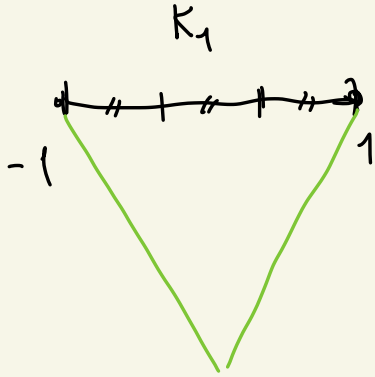
PER SIMMETRIA $\forall y \in T(C_2) \quad d(y, T(C_1)) \leq \lambda d_X(C_1, C_2)$

$$\Rightarrow d_X(T(C_1), T(C_2)) \leq \lambda d_X(C_1, C_2)$$

PER IL TEO DELLE CONTRAZIONI

$$\exists! C \in K(\mathbb{R}^n) \quad \text{T.C.} \quad C = T(C).$$

ESEMPIO (CURVA DI KOCH)



$K = \lim_n K_n$ CURVA DI KOCH ,

$$L(K_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L(K_1) \rightarrow +\infty$$

$$K_n \in K(\mathbb{R}^n)$$

$$K_{n+1} = T(K_n)$$

$$T(C) = \bigcup_{i=1} q_i(C)$$

$$q_i(x) = T_i\left(\frac{x}{3}\right) \quad T_i \text{ ISOMETRIA}$$

q_i SONO CONTRAZIONI CON $\lambda_i = \frac{1}{3}$

PER IL TEOREMA $\exists ! K \text{ T.C. } K = T(K)$

$$\forall K_1 \in K(\mathbb{R}^n) \quad T^{(n)}(K_1) \xrightarrow{n} K \text{ in } d_H$$

QUANTO È $\dim_H(K)$? CALCOLIAMO

$$\mathcal{H}^j(K) = \mathcal{H}^j(T(K)) = \mathcal{H}^j\left(\bigcup_i q_i(K)\right) = \sum_i \mathcal{H}^j(q_i(K))$$

$$= 4 \left(\frac{1}{3}\right)^j \mathcal{H}^j(K)$$

$$\text{SE } \mathcal{H}^j(K) \in (0, +\infty) \quad \text{PER } j = \dim_{\mathcal{H}}(K) \Rightarrow$$

$$1 = \frac{4}{3^j} \quad j = \dim_{\mathcal{H}}(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2).$$